This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math
5858
92B

Math 5858.92
B
Harvard University

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE LIBRARY OF

GUSTAVUS HAY

(A.B. 1850, M.D. 1857)

OF BOSTON

GIFT OF MRS. HAY

MAY 16, 1908

N° D'ORDRE

768.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. L. GÉRARD,

Professeur au Lycée de Douai.

1re THÈSE. — SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 décembre 1892 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président*.
POINCARÉ,
PICARD, } *Examinateurs*.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

N° D'ORDRE

768.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. L. GÉRARD,

Professeur au Lycée de Brest.

1re THÈSE. — SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 décembre 1892 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*

POINCARÉ, PICARD, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

Math 585-8.92
✓ B

Harvard University
Math. Dept. Library.
From the estate
of Dr. Gustavus Hay

TRANSFERRED TO
HARVARD COLLEGE LIBRARY
1943

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	N	Astronomie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
PROFESSEURS ADJOINTS	WOLF	Physique céleste.
	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

18938 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

Monsieur Paul APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA SORBONNE.

Hommage de reconnaissance.

Louis GÉRARD

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LA

GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

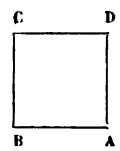
AVANT-PROPOS.

Dans la première Partie de ce travail, j'expose une méthode nouvelle pour établir les formules fondamentales de la Géométrie non euclidienne, en partant de cette remarque que :

Si l'on désigne par L *une longueur arbitraire, il existe un nombre correspondant* λ *tel que, dans tout quadrilatère* ABCD *qui a trois angles droits* A, B, C, *on ait*

$$\frac{1}{2}\left(e^{\lambda\frac{BC}{L}}+e^{-\lambda\frac{BC}{L}}\right)<\frac{CD}{AB}<\frac{1}{2}\left(e^{\lambda\frac{AD}{L}}+e^{-\lambda\frac{AD}{L}}\right);$$

on en déduit immédiatement la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle et, par suite, toutes les autres formules.



Je n'ai pas cru devoir employer les procédés du Calcul infinitésimal, qui masqueraient l'enchaînement des raisonnements géométriques, sans apporter de simplifications notables.

En outre, je me suis astreint à la condition de ne raisonner que sur des figures *que l'on sache construire.*

Cette condition, qu'Euclide s'est imposée comme une règle inflexible, n'est plus guère observée aujourd'hui; on a été jusqu'à dire que c'est une pure règle de jeu indigne de la Géométrie (1).

Il semble pourtant qu'elle soit indispensable si l'on veut réduire au minimum le nombre des postulats qu'on est obligé d'admettre sans démonstration.

En effet, la possibilité des constructions qu'on effectue avec la règle et le compas repose uniquement sur quatre hypothèses parfaitement définies :

1° Par deux points on peut faire passer une droite;

2° On peut tracer un cercle ayant pour centre un point donné et pour rayon une longueur donnée;

3° Une droite qui rencontre le périmètre d'un polygone en un point autre que l'un des sommets le recoupe en un ou plusieurs autres points;

4° Deux lignes droites, ou deux cercles, ou une ligne droite et un cercle se rencontrent, si l'une de ces deux lignes a des points situés de part et d'autre de l'autre.

Au contraire, si, comme Lobatschewsky et Bolyai, on considère des figures que l'on ne sache pas construire, par exemple, des droites parallèles (2), des horicycles, des horisphères, etc., on est obligé ou d'admettre l'existence de toutes ces figures comme autant d'hypothèses distinctes, ou d'en démontrer la possibilité par des considérations de continuité, ce qui revient à invoquer un principe assez mal défini qu'on peut appeler le *principe de continuité*. Il est bien difficile d'énoncer ce principe sous une forme assez précise pour servir de base à un raisonnement et assez générale pour embrasser tous les cas; et, quand même on y serait arrivé, on peut toujours se proposer d'établir les relations qui existent entre les éléments d'un triangle indépendamment de ce principe et en s'appuyant seulement sur les quatre hypothèses énoncées plus haut.

C'est ce que j'ai essayé de faire.

---

(1) Wilson M A., *Euclide comme texte de Géométrie élémentaire,* Mémoire lu à la Société mathématique de Londres (*Giornale di Mat.*, p. 364; 1868).

(2) Il est vrai que Bolyai indique le moyen de construire des parallèles, mais ce n'est qu'après avoir établi les formules fondamentales.

D'ailleurs, *a priori*, l'idée qui se présente naturellement à l'esprit pour découvrir la relation qui lie les côtés d'un triangle rectangle, c'est de tracer un réseau de perpendiculaires. Il est permis de croire que Lobatschewsky et Bolyai n'auraient jamais songé à l'horicycle et à l'horisphère s'ils ne s'étaient pas proposé avant tout de trouver une surface à laquelle puissent s'appliquer tous les raisonnements de la Géométrie euclidienne.

M. Battaglini (1) détermine directement la relation qui existe entre les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et l'un des angles aigus; mais sa démonstration, que MM. Rouché et de Comberousse ont reproduite dans leur *Traité de Géométrie*, n'est peut-être pas à l'abri de toute objection.

Dans la deuxième Partie, je commence par établir succinctement les formules de la *Géométrie analytique* non euclidienne en définissant la position d'un point dans le plan par *trois* coordonnées X, Y, Z liées par la relation $X^2 + Y^2 - Z^2 = -1$. Ce système de coordonnées donne des formules tout à fait analogues à celles de la Géométrie sphérique; il se prête très bien à la considération des points *idéaux* et permet de distinguer les points situés sur le *recto* et sur le *verso* du plan, absolument comme on distingue, en Géométrie sphérique, les points diamétralement opposés : cette distinction paraît nécessaire pour la généralité de certaines théories, par exemple, pour le *théorème de Ménélaüs* et pour la *puissance d'un point par rapport à un cercle*.

Ensuite, je passe en revue les diverses constructions qu'on peut faire en Géométrie non euclidienne avec la règle et le compas, et je démontre qu'il est impossible de construire la longueur $\frac{1}{\lambda}L$, définie plus haut, que Bolyai appelle l'*unité naturelle de longueur* (2).

Enfin, dans la troisième Partie, qui est très courte, je me propose uniquement de montrer qu'on peut présenter d'une manière très simple la mesure des aires des polygones en ne considérant deux poly-

---

(1) *Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky* (*Giornale*, p. 217).

(2) Bolyai, *Appendix*, n° 33.

gones comme *équivalents* que dans le cas où ils sont formés de parties superposables chacune à chacune, et en s'affranchissant de tout *postulatum*. Pour cela, il faut démontrer :

1° Que deux polygones quelconques A et B sont *comparables*, c'est-à-dire que l'on peut toujours :

Ou bien décomposer A et B en parties superposables chacune à chacune,

Ou bien décomposer A en deux parties dont l'une soit équivalente à B,

Ou enfin décomposer B en deux parties dont l'une soit équivalente à A;

2° Que ces trois manières d'être des deux polygones A et B sont *incompatibles;* par exemple, si l'on a pu décomposer A en deux parties dont l'une soit équivalente à B, il sera impossible de décomposer B en parties avec lesquelles on puisse recouvrir tout le polygone A.

Le premier de ces deux théorèmes est indispensable à tous les points de vue; quant au second, on pourrait sans doute l'ériger en axiome s'il était indémontrable; mais il ne l'est pas : il est même susceptible d'une démonstration très simple, aussi bien en Géométrie euclidienne qu'en Géométrie non euclidienne.

Ouvrages consultés.

LOBATSCHEWSKY, *Études géométriques sur la théorie des parallèles. — Pangeometria* (traduction italienne, *Giornale di Mat.;* 1867).

BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (traduction italienne, *Giornale di Mat.;* 1868).

BATTAGLINI, *Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky* (*Giornale;* 1867).

BELTRAMI, *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea* (*Giornale di Mat.;* 1868).

KLEIN, *Ueber die sogenannte nichteuclidische Geometrie* (*Math. Ann.;* 1871).

FLYE SAINTE-MARIE, *Études analytiques sur la théorie des parallèles.*

CASSANI, *Geometria rigorosa.*

DE TILLY, *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux;* 1880).

ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie* (Note II de la sixième édition).

PRÉLIMINAIRES.

1. On dit que deux portions de droite AB, CD sont *égales* quand elles sont superposables.

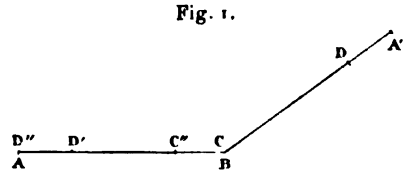
En supposant qu'on ait pu faire coïncider CD *avec* AB *en mettant le point* C *sur le point* A, *il n'est pas évident qu'on puisse faire coïncider* CD *avec* BA *en mettant le point* C *sur le point* B : *il faut le démontrer.*

Pour cela, M. de Tilly (*loc. cit.*, p. 47) considère le milieu O de AB, c'est-à-dire, comme il le dit lui-même, un point O tel que OA = OB; en effet, si l'on admet l'existence de ce point, on pourra faire coïncider BA avec AB et, par suite, avec CD.

Mais l'existence de ce point milieu est moins évidente que le théorème que nous voulons démontrer; il convient donc d'éviter la considération de ce point.

Supposons qu'on ait transporté le segment CD de façon que le point C coïncide avec le point B (*fig.* 1), et qu'on le fasse tourner

Fig. 1.



autour de ce point jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur BA : il s'agit de démontrer que le point D tombera sur le point A. En effet, supposons qu'il tombe en un point D' situé entre B et A; alors, en faisant tourner BD'A en sens inverse jusqu'à ce que le point D' revienne en D, le point A viendra se placer en un point A' situé sur le prolongement de CD. D'autre part, si l'on fait glisser le segment CD' jusqu'à ce que l'extrémité D' soit venue se placer en D'' sur le point A, l'origine C

prendra une certaine position C″ entre B et A. Actuellement, transportons le système des deux segments A′B, CD sur le système des deux segments C″D″, AB; comme les segments A′B et C″D″ sont la reproduction des segments AB et CD, on peut appliquer, en vertu de l'hypothèse, A′B sur C″D″, le point A′ sur le point C″ et le point B sur le point D″; mais alors il arrive que le point C se trouve placé en A, et le point D entre A et C″, par conséquent entre A et B, ce qui est contre l'hypothèse. Donc il est impossible que le point D′ tombe entre B et A. On démontrerait de la même façon qu'il ne peut pas tomber sur le prolongement de BA; donc il tombe au point A. C. Q. F. D.

On appelle *somme* de plusieurs portions de droites la portion de droite obtenue en les portant, à la suite les unes des autres, sur une même ligne droite.

On dit qu'une droite A est *plus grande* qu'une droite B, ou que B est *plus petite* que A, si l'on peut trouver une troisième droite C telle que $A = B + C$.

En s'appuyant sur les définitions et le théorème qui précèdent, on *démontre* (¹) que :

1° L'addition des portions de droites est une opération *associative* et *commutative;*

2° Entre deux portions de droites A et B, il existe l'une des trois relations

$$A = B, \qquad A > B, \qquad A < B,$$

et *chacune de ces trois relations exclut les deux autres;*

3° Si $A = A'$, $B = B'$; il en résulte $A + B = A' + B'$;

Etc.

2. On peut répéter sur les angles tout ce qu'on vient de dire sur les portions de droites.

3. Pour évaluer le rapport de deux droites A et B, les définitions et les principes précédents ne suffisent pas; il faut encore *admettre* que, quelles que soient A et B,

---

(¹) O. Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, p. 70.

On peut trouver un multiple de B *qui surpasse* A ([1]) : $nB > A$.

On en déduit $\frac{1}{n}A < B$, c'est-à-dire qu'on peut trouver un sous-multiple de A qui soit moindre que B.

Le rapport de deux droites données est un nombre déterminé, commensurable ou non; mais, comme nous n'acceptons que les constructions qu'on peut faire avec la règle et le compas, nous n'admettrons pas qu'à tout nombre donné a corresponde nécessairement un système de deux droites A, B telles que $\frac{A}{B} = a$.

Pour la même raison, chaque fois qu'il sera question de diviser une droite en n parties égales, nous supposerons que n est une puissance de 2.

En ce qui concerne la mesure des angles, il n'est pas nécessaire d'admettre un axiome nouveau : si l'on *admet* que les multiples d'un segment de droite peuvent surpasser toute droite donnée, on peut *démontrer* que les multiples d'un angle α peuvent surpasser tout angle donné. En effet, considérons un triangle quelconque et un cercle situé à l'intérieur de ce triangle; construisons n angles consécutifs égaux à α et ayant pour sommet commun le centre du cercle; soit c la corde qui sous-tend l'arc compris entre les côtés de l'un de ces angles, on peut, par hypothèse, choisir n de façon que nc surpasse le périmètre du triangle considéré, et alors $n\alpha$ sera plus grand que quatre angles droits. C. Q. F. D.

([1]) M. Stolz (*loc. cit.*, p. 70) désigne cet axiome sous le nom de *principe d'Archimède;* mais il se trouve aussi dans Euclide, qui l'énonce sous forme de définition en disant que *des grandeurs ont un rapport entre elles quand les multiples de chacune d'elles peuvent surpasser toutes les autres* (Livre V, définition IV).

CHAPITRE I.

TRIGONOMÉTRIE.

4. On sait (voir *Éléments de Legendre* ou *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse) que la somme des trois angles d'un triangle ne peut surpasser deux angles droits et que, s'il existe un triangle pour lequel cette somme soit égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle.

Donc il n'y a que deux hypothèses possibles : ou la somme des trois angles est égale à deux angles droits dans tous les triangles, ou bien elle est dans tous moindre que deux angles droits.

La première hypothèse conduit à la *Géométrie ordinaire*. La seconde sert de base à la Géométrie que Gauss a appelée *Géométrie non euclidienne*, et que je me propose d'établir après Lobatschewsky, Bolyai, etc.

Nous supposons donc que la somme des trois angles d'un triangle quelconque est moindre que deux angles droits; par conséquent, la somme des angles d'un polygone de n côtés est moindre que $2n - 4$ angles droits. On appelle *déficit* du polygone ce qui manque à la somme de ses angles pour faire $2n - 4$ angles droits.

Si l'on décompose un polygone en deux autres, on voit facilement que le déficit du polygone total est la somme des déficits des polygones partiels; par conséquent, le déficit du premier polygone est plus grand que le déficit de chacun des deux autres.

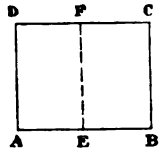
5. *Si, dans un quadrilatère* ABCD (*fig.* 2) *qui a deux angles droits* A *et* B, *les côtés* AD *et* BC *sont égaux, les angles* C *et* D *sont aussi égaux.*

Menons une perpendiculaire à AB en son milieu E : cette perpendiculaire ne pouvant rencontrer ni AD, ni BC coupe CD en un point F. Plions la figure autour de EF, le quadrilatère EBCF vient s'appliquer sur le quadrilatère EADF, et l'angle C coïncide avec l'angle D; donc ces deux angles sont égaux. D'ailleurs, ils sont *aigus*, puisque la somme

des angles du quadrilatère ABCD est moindre que quatre angles droits.

L'égalité des quadrilatères EBCF et EADF montre aussi que EF est perpendiculaire à CD en son milieu.

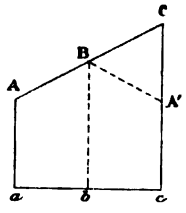
Fig. 2.



6. *Si, dans un quadrilatère* AC*ac* (*fig.* 3) *qui a deux angles droits a et c, l'angle* A *est droit ou obtus, le côté* A*a est moindre que le côté opposé* C*c*.

Par le milieu *b* de *ac*, élevons sur *ac* une perpendiculaire, qui rencontre AC en un point B situé entre A et C. Comme l'angle A est droit

Fig. 3.



ou obtus, l'angle AB*b* est aigu : donc *b*BC est obtus; par conséquent, si l'on plie la figure autour de B*b*, BA tombe à l'intérieur de l'angle obtus *b*BC, et le point A vient en un point A' situé entre *c* et C : donc $Cc > A'c = Aa$.

On voit aussi que, le quadrilatère A'B*bc* étant contenu dans le quadrilatère BC*cb*, le déficit de A'B*bc* est moindre que celui de BC*cb*, c'est-à-dire que le déficit de AB*ba* est moindre que la moitié du déficit du quadrilatère total AC*ca*. Cette remarque sera utilisée plus loin.

7. *Dans un quadrilatère* AC*ca* (*fig.* 3 *et* 4) *qui a deux angles droits a et c et un angle* A *droit ou obtus, si d'un point* B *du côté* AC *on abaisse*

Bb *perpendiculaire sur* ac, *on a*

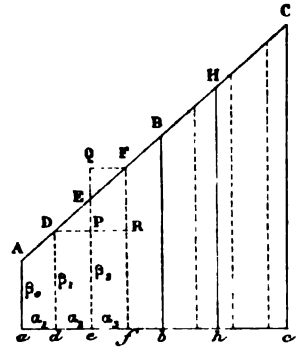
$$Aa < Bb < Cc,$$

$$\frac{ac}{ab} < \frac{AC}{AB},$$

$$\frac{Cc - Aa}{Bb - Aa} > \frac{AC}{AB}.$$

La première partie du théorème résulte de ce qui précède. Pour démontrer les deux autres, divisons AB en n parties égales et prolon-

Fg. 4.



geons la graduation jusqu'au point C, puis menons par les points de division des perpendiculaires à ac, qui déterminent sur ac des segments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots,$$

α_1 étant le premier à partir de a, α_2 le second, etc.

Il est aisé de voir que ces segments vont en décroissant (¹). Car soient DE, EF deux divisions consécutives de AB, DE étant la plus rapprochée du point A; et soient de, ef leurs projections sur ac. Abaissons DP et FQ perpendiculaires sur Ee; comme DE = EF, les triangles DEP, EFQ sont égaux : donc DP = FQ. D'ailleurs, l'angle DEe étant aigu, le point Q tombe sur le prolongement de eE, et le point P entre E et e; donc la droite DP prolongée pénètre à l'intérieur du quadrilatère efFQ, et, comme elle ne peut rencontrer ni ef, ni FQ, elle coupe

(¹) *Voir*, dans l'Ouvrage de M. de Tilly cité plus haut, p. 137, un raisonnement analogue.

Ff en un point R situé entre f et F. Il en résulte (6) que RP est moindre que FQ, par conséquent moindre que DP. Dès lors, si l'on plie la figure autour de Pe, le point R tombera sur PD entre P et D et, par conséquent, le point f tombera sur ed entre e et d, de sorte que $ef < ed$.

Ainsi

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots.$$

J'en conclus d'abord

$$ab = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > n\alpha_n.$$

Ensuite, s'il arrive que BC soit un multiple exact de $\frac{AB}{n}$, par exemple,

$$BC = \frac{m}{n} AB,$$

on voit que

$$bc = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+m} < m\alpha_n;$$

donc

$$\frac{bc}{ab} < \frac{m}{n} = \frac{BC}{AB},$$

d'où

$$\frac{ac}{ab} < \frac{AC}{AB}.$$

Mais, en général, BC est compris entre deux multiples consécutifs de $\frac{AB}{n}$:

$$\frac{m}{n} AB < BC < \frac{m+1}{n} AB.$$

Dans ce cas

$$bc < \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+m+1} < (m+1)\alpha_n,$$

d'où

$$\frac{bc}{ab} < \frac{m+1}{n} < \frac{BC}{AB} + \frac{1}{n},$$

et cela, si grand que soit n. J'en conclus, non pas

$$\frac{bc}{ab} < \frac{BC}{AB},$$

mais seulement

$$\frac{bc}{ab} \leqq \frac{BC}{AB}.$$

Pour lever la difficulté, je considère le milieu H de BC, que je projette en h sur ac. D'après ce qu'on vient de voir,

$$\frac{bh}{ab} \leqq \frac{BH}{AB},$$

et

$$hc < bh;$$

donc

$$\frac{bc}{ab} < 2\frac{bh}{ab} \leqq 2\frac{BH}{AB} = \frac{BC}{AB}.$$

Autrement. Soit p un entier tel que

$$\frac{p}{n} AB < BH < \frac{p+1}{n} AB.$$

On voit, comme plus haut, que

$$bh < \frac{p+1}{n} ab.$$

Ensuite, bc étant moindre que $2bh$, on peut supposer n assez grand pour que

$$bc < 2bh - \frac{2}{n} ab,$$

et alors

$$bc < \frac{2p+2}{n} ab - \frac{2}{n} ab$$

ou

$$\frac{bc}{ab} < \frac{2p}{n} < \frac{BC}{AB}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons à la troisième partie du théorème.

Posons $Aa = \beta_0$, et désignons par

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots$$

les ordonnées des différents points de division, β_1 étant la plus voisine de Aa, β_2 la suivante, etc.

Il est aisé de voir que la différence entre deux ordonnées consécutives va en croissant à mesure qu'on s'éloigne de Aa. Car, soient Dd, Ee, Ff trois ordonnées consécutives, Dd étant la plus voisine de Aa;

abaissons DP et FQ perpendiculaires sur Ee; nous avons déjà dit que le point P tombe entre E et e, et le point Q sur le prolongement de eE. Donc

$$EP = Ee - Pe,$$
$$EQ = Qe - Ee;$$

mais EP = EQ, donc

$$Ee - Pe = Qe - Ee.$$

Or (6) $Pe < Dd$ et $Qe < Ff$, donc

$$Ee - Dd < Ff - Ee.$$

Ainsi

$$\beta_1 - \beta_0 < \beta_2 - \beta_1 < \beta_3 - \beta_2 < \ldots.$$

J'en conclus d'abord

$$\begin{aligned} Bb - Aa &= (\beta_n - \beta_{n-1}) + \ldots + (\beta_2 - \beta_1) + (\beta_1 - \beta_0) \\ &< n(\beta_n - \beta_{n-1}). \end{aligned}$$

Ensuite, en supposant que BC soit un multiple exact de $\frac{AB}{n}$, par exemple : $BC = \frac{m}{n} AB$,

$$\begin{aligned} Cc - Bb &= (\beta_{n+m} - \beta_{n+m-1}) + \ldots + (\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &> m(\beta_n - \beta_{n-1}). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{Cc - Bb}{Bb - Aa} > \frac{m}{n} = \frac{BC}{AB},$$

d'où

$$\frac{Cc - Aa}{Bb - Aa} > \frac{AC}{AB}.$$

En raisonnant comme plus haut, on verrait que cette relation subsiste dans le cas où BC n'est pas un multiple exact de $\frac{AB}{n}$.

8. Dans le cas particulier où le côté Aa se réduit à un point, le quadrilatère ACca devient un triangle ; mais le théorème que nous venons de démontrer est toujours vrai.

Donc, *dans un triangle* ACc (*fig.* 5) *rectangle en c, si d'un point* B

de l'hypoténuse on abaisse Bb *perpendiculaire sur* Ac, on a

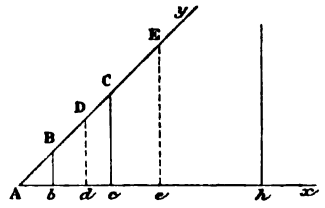
$$\frac{Ac}{Ab} < \frac{AC}{AB} < \frac{Cc}{Bb} \quad (^1).$$

Par exemple, si AC $= n$AB, n étant un nombre entier quelconque, on aura

$$Cc > nBb;$$

par conséquent, étant donné un angle aigu xAy, on pourra trouver sur l'un des côtés un point C dont la distance à l'autre côté surpasse

Fig. 5.



n'importe quelle longueur donnée. C'est Aristote qui a le premier formulé cette proposition.

Au contraire, Lobatschewsky a démontré que l'on peut assigner une longueur que la projection de AC ne puisse pas dépasser, quelque grand que soit AC.

En effet, d'un point B de Ay abaissons Bb perpendiculaire sur Ax, désignons par ω le déficit du triangle ABb, et prenons sur Ax une longueur Ad $= 2$Ab; si la perpendiculaire à Ax au point d rencontre Ay en un point D, le déficit du triangle ADd sera plus grand que 2ω (6).

De même, en faisant Ae $= 2$Ad $= 4$Ab, si la perpendiculaire à Ax au point e rencontre Ay en un point E, le déficit du triangle AEe sera plus grand que 4ω. Et ainsi de suite.

Ceci posé, soient A′ le complément de l'angle A et n un entier tel que

$$2^n\omega > A'.$$

---

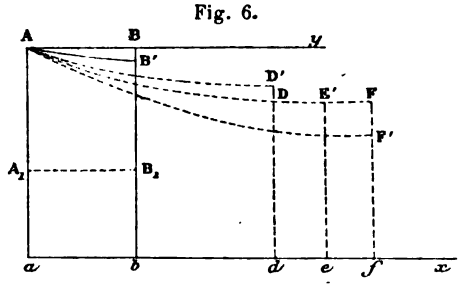
(1) La première partie de ce théorème se trouve dans l'Ouvrage de M. de Tilly, déjà cité, p. 137.

Si nous prenons $Ah = 2^n Ab$, il est impossible que la perpendiculaire à Ax au point h rencontre Ay, car, en appelant H le point de rencontre, le déficit du triangle AHh serait plus grand que $2^n\omega$, et par suite plus grand que A′, ce qui est impossible.

Il faut en conclure que tous les points de Ay se projettent sur Ax entre A et h. C. Q. F. D.

9. Soient ax et Ay (*fig.* 6) deux demi-droites perpendiculaires à une même droite Aa; si, d'un point B de Ay, on abaisse Bb perpendiculaire

Fig. 6.



à ax, nous savons que le rapport $\frac{AB}{ab}$ va en décroissant à mesure que le point B se rapproche du point A. Donc, si l'on fait tendre AB vers zéro, le rapport $\frac{AB}{ab}$ tend vers une limite, que nous désignerons par $f(aA)$.

D'autre part, abaissons AB′ perpendiculaire sur Bb, et voyons comment varie le rapport $\frac{AB'}{ab}$ quand ab diminue. Pour cela, prenons sur ax deux segments de, ef consécutifs et égaux

$$de = ef,$$

de étant le plus rapproché du point a; par les trois points d, e, f élevons des perpendiculaires à ax, et projetons le point A sur ces trois perpendiculaires en D′, E′, F′.

Je dis que

$$AE' - AD' > AF' - AE'.$$

En effet, les points A, E′ étant de part et d'autre de $D'd$, la droite AE′ rencontre $D'd$ en un point D, et, comme $de = ef$, elle rencontre aussi $F'f$

en un point F tel que

$$DE' = E'F$$

ou

$$AE' - AD = AF - AE'.$$

Mais $AD > AD'$ et $AF > AF'$, donc

$$AE' - AD' > AF' - AE'.$$

En partant de là et en raisonnant comme au n° 7, on démontre que le rapport $\frac{AB'}{ab}$ augmente à mesure que ab diminue. Donc, si l'on fait tendre ab vers zéro, ce rapport tend, lui aussi, vers une limite, qui est nécessairement inférieure ou au plus égale à la limite $f(aA)$ du rapport $\frac{AB}{ab}$. Par conséquent, $\frac{AB'}{ab} < f(aA)$.

On démontrerait de la même manière que $\frac{AB}{ab} < f(bB)$. Ainsi

$$f(aA) < \frac{AB}{ab} < f(bB)$$

et

$$\frac{AB'}{ab} < f(aA) < \frac{AB}{ab}.$$

Il résulte de là que $f(aA) > 1$. De plus $f(aA)$ augmente ou diminue en même temps que aA. Car, prenons sur aA une longueur $aA_1 < aA$, et par le point A_1 menons une perpendiculaire à Aa, qui rencontre Bb en un point B_1; nous aurons

$$f(aA_1) < \frac{A_1B_1}{ab}, \qquad f(aA) > \frac{AB'}{ab}.$$

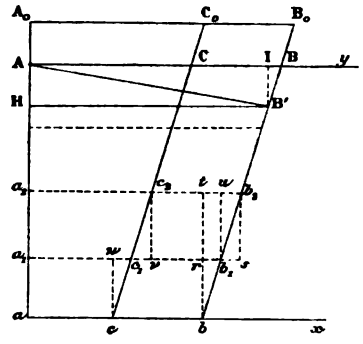
Par conséquent, pour établir que $f(aA_1) < f(aA)$, il suffit de montrer que A_1B_1 finit par devenir moindre que AB'. En effet, si l'on prend $AB < AA_1$, on aura, à plus forte raison, $AB' < AA_1$, et alors le point B' tombera entre B et B_1, d'où $AB' > A_1B_1$.

Nous allons maintenant chercher à déterminer la forme de la fonction $f(Aa)$.

10. Prenons sur le prolongement de aA (*fig.* 7) un point A_0, par ce

point menons une perpendiculaire à aA, et d'un point B_0 de cette perpendiculaire abaissons $B_0 b$ perpendiculaire sur ax; soit B le point où $B_0 b$ rencontre la perpendiculaire Ay menée par le point A à la droite Aa. Partageons aA en n parties égales, et, par les points de division a_1,

Fig. 7.



a_2, ..., menons des perpendiculaires à aA, qui rencontrent bB en des points b_1, b_2, ...

Abaissons br et $b_2 s$ perpendiculaires sur $a_1 b_1$, nous savons (7) que $b_1 b_2 > bb_1$, donc

$$b_1 s > b_1 r;$$

il en résulte qu'en appelant t et u les points où $a_2 b_2$ est rencontré par le prolongement de br et par la perpendiculaire à $a_1 b_1$ au point b_1, on a (7)

$$ub_2 > tu \qquad \text{ou} \qquad a_2 b_2 - a_2 u > a_2 u - a_2 t.$$

Mais, comme $aa_1 = a_1 a_2$, il est clair que $a_2 t = ab$; et, comme $a_1 b_1 > ab$, le théorème du n° 7 nous apprend que

$$\frac{a_2 u}{a_1 b_1} > \frac{a_1 b_1}{ab},$$

ou, en posant $\frac{a_1 b_1}{ab} = \lambda$,

$$a_2 u > \lambda a_1 b_1;$$

donc

$$a_2 b_2 > 2\lambda a_1 b_1 - ab.$$

En opérant de même sur $a_3 b_3$, $a_4 b_4$, ..., on trouve que les $a_i b_i$ sont

liés par les relations

$$\begin{aligned}
&a_1 b_1 = \lambda ab,\\
&a_2 b_2 > 2\lambda a_1 b_1 - ab,\\
&a_3 b_3 > 2\lambda a_2 b_2 - a_1 b_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
&a_1 b_1 = \lambda ab,\\
&a_2 b_2 > \lambda a_1 b_1 + (\lambda^2 - 1)ab,\\
&a_3 b_3 > \lambda a_2 b_2 + (\lambda^2 - 1)(a_1 b_1 + \lambda ab),\\
&a_4 b_4 > \lambda a_3 b_3 + (\lambda^2 - 1)(a_2 b_2 + \lambda a_1 b_1 + \lambda^2 ab),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda,\\ x_2 = 2\lambda x_1 - 1,\\ x_3 = 2\lambda x_2 - x_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ou

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda,\\ x_2 = \lambda x_1 + (\lambda^2 - 1),\\ x_3 = \lambda x_2 + (\lambda^2 - 1)(x_1 + \lambda).\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

comme $\lambda^2 - 1 > 0$, on voit que

$$a_i b_i > x_i ab.$$

Or, puisque $\lambda > 1$, on peut poser

$$\lambda = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}),$$

en désignant par α un nombre positif; et alors, en substituant dans les formules (1), on trouve

$$x_2 = \frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2},$$

$$x_3 = \frac{e^{3\alpha} + e^{-3\alpha}}{2};$$

et, en général,

$$x_i = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2};$$

donc, puisque AB ou $a_n b_n$ est plus grand que $x_n ab$, on en conclut que

$$\frac{AB}{ab} > \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2}.$$

Mais, en menant AB′ perpendiculaire à Bb, nous avons vu dans le numéro précédent que

$$f(aA) > \frac{AB'}{ab};$$

donc

$$\frac{AB}{AB'} f(aA) > \frac{AB}{ab} > \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2}.$$

De plus, si nous abaissons B′I perpendiculaire sur AB, nous savons (8) que, dans les deux triangles ABB′, AB′I, le rapport $\frac{AB}{AB'}$ des hypoténuses est moindre que le rapport des côtés opposés à l'angle commun A

$$\frac{AB}{AB'} < \frac{BB'}{B'I},$$

et, à plus forte raison (6 et 7), en menant B′H perpendiculaire à Aa,

$$\frac{AB}{AB'} < \frac{BB'}{AH} < \frac{BB_0}{AA_0}.$$

Par conséquent,

$$\frac{BB_0}{AA_0} f(aA) > \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2},$$

d'où enfin, en remarquant que $BB_0 < AB_0 < AA_0 + A_0B_0$,

$$(3) \qquad \left(1 + \frac{A_0B_0}{AA_0}\right) f(aA) > \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2}.$$

En partant de la relation

$$\frac{a_1 b_1}{ab} = \lambda = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2},$$

on trouverait de la même manière

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{A_0B_0}{AA_0}\right) f(aa_1) > \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

Reste à trouver une limite supérieure de $f(a\mathrm{A})$.

Pour cela, prenons sur AB une longueur $\mathrm{AC} = ab$ et abaissons $\mathrm{C}c$ perpendiculaire à ab; en appelant c_i le point de rencontre de $\mathrm{C}c$ avec a_ib_i, toutes les longueurs a_ic_i seront moindres que AC, par suite moindres que ab.

Menons c_2v et cw perpendiculaires à a_1c_1, dans les deux triangles rectangles c_1c_2v, cc_1w qui ont un angle aigu commun, comme $c_1c_2 > cc_1$ (7), le théorème du n° 8 nous apprend que

$$\frac{c_1v}{c_1w} < \frac{c_1c_2}{cc_1},$$

d'où, en posant

$$\frac{c_ic_{i+1}}{c_{i-1}c_i} = \mu_i,$$

on déduit $c_1v < \mu_1c_1w$, ou

$$a_1v - a_1c_1 < \mu_1(a_1c_1 - a_1w),$$

ou encore

$$a_1v + \mu_1a_1w < (1 + \mu_1)a_1c_1.$$

Or a_1v et a_1w sont moindres que ab, donc (7)

$$\frac{ac}{a_1w} < \frac{a_2c_2}{a_1v} < \frac{a_1b_1}{ab} = \lambda;$$

d'où

$$a_2c_2 + \mu_1ac < \lambda(a_1v + \mu_1a_1w) < \lambda(1 + \mu_1)a_1c_1.$$

En opérant de même sur a_3c_3, a_4c_4, ..., on trouve que les a_ic_i sont liés par les relations

$$\begin{aligned}
&a_1c_1 < \lambda ac,\\
&a_2c_2 < \lambda\mu_1a_1c_1 + \lambda a_1c_1 - \mu_1ac,\\
&a_3c_3 < \lambda\mu_2a_2c_2 + \lambda a_2c_2 - \mu_2a_1c_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&a_1c_1 < \lambda ac,\\
&a_2c_2 < \lambda a_1c_1 + (\lambda^2 - 1)\mu_1ac,\\
&a_3c_3 < \lambda a_2c_2 + (\lambda^2 - 1)\mu_2(a_1c_1 + \lambda\mu_1ac),\\
&a_4c_4 < \lambda a_3c_3 + (\lambda^2 - 1)\mu_3(a_2c_2 + \lambda\mu_2a_1c_1 + \lambda^2\mu_1\mu_2ac),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En comparant ces relations aux formules (2) qui définissent les x_i, et en observant que $\lambda^2 - 1 > 0$ et $\mu_i > 1$, on voit que

$$a_1 c_1 < x_1 ac,$$
$$a_2 c_2 < \mu_1 x_2 ac,$$
$$a_3 c_3 < \mu_1 \mu_2 x_3 ac;$$

finalement

$$\frac{a_n c_n}{ac} < \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-1} x_n,$$

ou

$$\frac{AC}{ac} < \frac{Cc_{n-1}}{cc_1} \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2},$$

Or $cc_1 > aa_1 = Aa_{n-1}$, donc

$$\frac{Cc_{n-1}}{cc_1} < \frac{Cc_{n-1}}{Aa_{n-1}} < \frac{CC_0}{AA_0} \quad (7)$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{Cc_{n-1}}{cc_1} < \frac{AB_0}{AA_0} < 1 + \frac{A_0B_0}{AA_0}.$$

Par conséquent

$$\frac{AC}{ac} < \left(1 + \frac{A_0B_0}{AA_0}\right) \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2};$$

mais $f(aA) < \frac{AC}{ac}$, donc

$$(5) \qquad f(aA) < \left(1 + \frac{A_0B_0}{AA_0}\right) \frac{e^{n\alpha} + e^{-n\alpha}}{2}.$$

Enfin

$$(6) \qquad f(aa_1) < \frac{a_1 b_1}{ab} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}.$$

En réunissant les relations (3), (4), (5), (6) et en posant conformément à l'usage

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

on a

$$\left(1+\frac{A_0B_0}{AA_0}\right)f(aA) > \operatorname{ch} n\alpha,$$

$$\left(1+\frac{A_0B_0}{AA_0}\right)\operatorname{ch} n\alpha > f(aA),$$

$$f(aa_1) < \operatorname{ch}\alpha < \left(1+\frac{A_0B_0}{AA_0}\right)f(aa_1).$$

Or, comme $f(x) > 1$, à chaque valeur de x correspond un nombre *positif* $\varphi(x)$ tel que

$$f(x) = \operatorname{ch}\varphi(x).$$

D'autre part, en laissant fixe la longueur AA_0, on peut déterminer A_0B_0 de telle sorte que, en désignant par ω un nombre positif choisi arbitrairement, on ait

$$1+\frac{A_0B_0}{AA_0} < \operatorname{ch}\omega;$$

et alors les relations précédentes donnent

$$\operatorname{ch} n\alpha < \operatorname{ch}\omega \operatorname{ch}\varphi(aA),$$

$$\operatorname{ch}\varphi(aA) < \operatorname{ch}\omega \operatorname{ch} n\alpha;$$

d'où

$$n\alpha - \omega < \varphi(aA) < n\alpha + \omega.$$

De même

$$\varphi(aa_1) < \alpha < \varphi(aa_1) + \omega,$$

par conséquent

$$n\varphi(aa_1) - \omega < \varphi(aA) < n\varphi(aa_1) + (n+1)\omega.$$

Or n est un entier fixe, tandis que ω est un nombre positif aussi petit qu'on voudra, donc

$$\varphi(aA) = n\varphi(aa_1)$$

ou

$$\varphi(naa_1) = n\varphi(aa_1)\ (^1).$$

---

(1) On peut démontrer plus rapidement cette formule. En effet, comme $b_1 r < b_1 s$, on a, en faisant $aa_1 = \beta$,

$$a_1 b_1 < \frac{1}{2}(a_1 s + a_1 r) < \frac{a_2 b_2 + ab}{2f(\beta)}$$

et, en général,

$$2a_i b_i f(\beta) < a_{i+1} b_{i+1} + a_{i-1} b_{i-1}:$$

Ceci posé, soit X une longueur quelconque, et supposons d'abord

$$X = \frac{m}{n} aA = m a a_1;$$

il en résulte

$$\varphi(X) = m\varphi(aa_1) = \frac{m}{n}\varphi(aA) = \frac{X}{aA}\varphi(aA).$$

Supposons maintenant

$$\frac{m}{n} < \frac{X}{aA} < \frac{m+1}{n}$$

ou

$$m a a_1 < X < (m+1) a a_1,$$

comme la fonction $\varphi(X)$ croît en même temps que X (9), il en résulte

$$m\varphi(aa_1) < \varphi(X) < (m+1)\varphi(aa_1)$$

ou

$$\frac{m}{n}\varphi(aA) < \varphi(X) < \frac{m+1}{n}\varphi(aA),$$

et cela, quelque grand que soit n. Donc, dans tous les cas,

$$\varphi(X) = \frac{X}{Aa}\varphi(Aa).$$

Mais rien n'empêche de *représenter* la longueur X par le *nombre*

$$\frac{X}{Aa}\varphi(Aa),$$

---

d'où

$$2f(i\beta)f(\beta) \leqq f[(i+1)\beta] + f[(i-1)\beta].$$

De même, de ce que $\frac{c_1 v}{c_1 w} < \mu_1$, on déduit

$$a_1 c_1 > \frac{a_1 v + \mu_1 a_1 w}{1+\mu_1} > \frac{a_2 c_2 + \mu_1 ac}{\lambda(1+\mu_1)}$$

et, en général,

$$\lambda a_i c_i (1+\mu_i) > a_{i+1} c_{i+1} + \mu_i a_{i-1} c_{i-1};$$

mais $\mu_i < 1 + \frac{A_0 B_0}{AA_0}$; donc. si l'on fait tendre $A_0 B_0$ vers zéro, μ_i tend vers 1, et la relation précédente devient

$$2f(i\beta)f(\beta) \geqq f[(i+1)\beta] + f[(i-1)\beta].$$

Par conséquent,

$$2f(i\beta)f(\beta) = f[(i+1)\beta] + f[(i-1)\beta],$$

d'où l'on déduit aisément $\varphi(n\beta) = n\varphi(\beta)$.

qui lui est proportionnel : c'est ce que nous ferons désormais ; et alors, en désignant ce nombre par x, nous écrirons

$$\varphi(x) = x$$

ou

$$f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Il semblerait plus naturel de poser

$$K = \frac{Aa}{\varphi(Aa)},$$

et d'écrire

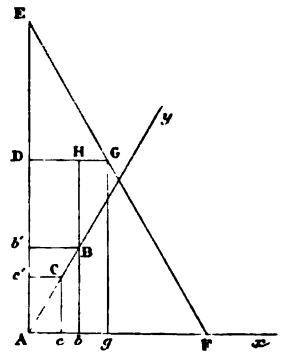
$$f(X) = \operatorname{ch}\frac{X}{K} = \operatorname{ch} x,$$

en désignant par x le nombre qui mesure la longueur X quand on prend pour unité la longueur K, que Bolyai appelle l'*unité naturelle de longueur*.

Mais, comme il est impossible de construire exactement la longueur K, il faudrait admettre l'*existence* de cette longueur : ce qui implique un postulatum que nous avons voulu éviter.

11. Étant donné un angle aigu xAy (*fig.* 8), si d'un point B pris

Fig. 8.



sur l'un des côtés Ay on abaisse Bb perpendiculaire sur l'autre côté Ax, nous savons (8) que le rapport

$$\frac{Bb}{AB}$$

diminue en même temps que AB; on pourrait en conclure que ce rapport tend vers une limite lorsque AB tend vers zéro. Mais cette limite n'interviendra pas dans nos raisonnements. Il nous suffit de montrer qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une longueur δ telle que, si les hypoténuses AB et AC de deux triangles rectangles ABb, ACc qui ont un angle aigu commun A satisfont à la relation

$$AC < AB < \delta,$$

on ait

$$\frac{Cc}{AC} < \frac{Bb}{AB} < \frac{Cc}{AC}(1+\varepsilon),$$

quelle que soit la valeur de l'angle commun A.

En effet, projetons les points B et C en b', c' sur la perpendiculaire à Ax au point A; nous savons (8) que

$$\frac{Ab'}{AB} < \frac{Ac'}{AC} < \frac{Cc}{AC},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{Bb}{AB} < \frac{Cc}{AC}\,\frac{Bb}{Ab'}.$$

Ceci posé, prenons sur la perpendiculaire à Ax au point A une longueur arbitraire AD, et sur le prolongement de AD une longueur DE telle que

$$DE < \varepsilon AD, \qquad \text{ou} \qquad \frac{AE}{AD} < 1+\varepsilon;$$

puis, sur Ax, une longueur AF = AD. Ensuite joignons EF qui rencontre en G la perpendiculaire menée par le point D à la droite AD; enfin abaissons Gg perpendiculaire sur Ax.

Je dis que Ag est la longueur cherchée δ.

Car Ag < AF = AD. Si donc AB < Ag, le triangle ABb est contenu tout entier à l'intérieur du quadrilatère ADGg, et, en appelant H le point où le prolongement de bB rencontre DG, on a (7)

$$\frac{bB}{Ab'} < \frac{bH}{AD} < \frac{gG}{AD} < \frac{AE}{AD} < 1+\varepsilon,$$

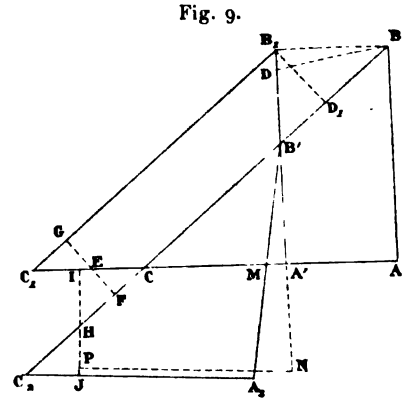
d'où, en vertu de la relation (1),

$$\frac{Bb}{AB} < \frac{Cc}{AC}(1+\varepsilon). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. Nous allons maintenant chercher la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A.

D'un point B′ (*fig.* 9) pris sur l'hypoténuse BC, abaissons B′A′ per-

Fig. 9.



pendiculaire sur AC; puis faisons glisser le triangle ABC le long de AC jusqu'à ce que le point A vienne en A′ : le point B viendra en B_1 sur le prolongement de A′B′, et le point C en C_1 sur le prolongement de AC.

Le triangle $BB'B_1$ a ses trois angles aigus (5); donc, si nous menons les hauteurs BD, B_1D_1, le point D tombe entre B_1 et B′, et le point D_1 entre B et B′. De plus, l'angle $B'B_1B$, qui est égal à l'angle ABB_1, est plus grand que $B'BB_1$; donc

$$BB' > B_1B'.$$

D'ailleurs on voit sans peine que $BB' > AA' = CC_1$.

Ceci posé, dans le quadrilatère ABDA′, on a (9)

$$\operatorname{ch} A'D < \frac{BD}{AA'} < \operatorname{ch} AB;$$

d'où, en supposant $BB' < AB$,

$$(1) \qquad \operatorname{ch}(AB - BB') < \frac{BD}{AA'} < \operatorname{ch} AB.$$

Ensuite, comme les angles C et C_1 sont égaux, si par le point E milieu de CC_1 on mène EF perpendiculaire à BC, cette droite EF rencontrera B_1C_1 en un point G tel que EF = EG et sera également perpendiculaire sur B_1C_1; de sorte que, dans le quadrilatère trirectangle B_1D_1FG, on a (9)

$$\operatorname{ch} FD_1 < \frac{B_1D_1}{FG} < \operatorname{ch} GB_1,$$

et, à plus forte raison,

$$\operatorname{ch}(BC - BB') < \frac{B_1D_1}{FG} < \operatorname{ch} BC. \tag{2}$$

Puis faisons glisser le triangle ABC le long de BC jusqu'à ce que le point B vienne en B' : le point C vient en C_2 sur le prolongement de BC, et le point A en A_2 *à l'intérieur* de l'angle CB'A', parce que le déficit du triangle ABC est plus grand que celui du triangle A'B'C. En outre, comme les angles C et C_2 sont égaux, si par le point H milieu de CC_2 on mène HI perpendiculaire à AC, cette droite HI rencontrera A_2C_2 en un point J tel que HJ = HI et sera également perpendiculaire sur A_2C_2; de sorte que dans le quadrilatère trirectangle MA_2JI, M étant le point de rencontre de $B'A_2$ et de AC, on a (9)

$$\frac{A_2M}{IJ} > \operatorname{ch} JA_2.$$

Or, en supposant $CC_2 = BB' < AC$, on a $JA_2 > AC - BB'$.

D'autre part, $B'M > B'A'$ et $B'A_2 = B_1A'$, donc

$$A_2M < B_1B';$$

par conséquent

$$\frac{B_1B'}{IJ} > \operatorname{ch}(AC - BB'). \tag{3}$$

Pour trouver une limite supérieure de B_1B', je prends sur le prolongement de B'A' une longueur $A'N = B_1B'$, de sorte que, B'N étant égal à $B'A_2$, le point N tombe dans l'angle $B'C_2A_2$; donc, si l'on abaisse NP perpendiculaire sur IJ, le point P tombe entre I et J, et, dans le quadrilatère trirectangle A'NPI, on a (9)

$$\frac{A'N}{PI} < \operatorname{ch} PN$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{A'N}{IJ} < \operatorname{ch} PN.$$

Mais $A'N = B_1B'$ et

$$PN < PI + IC + CA' + A'N < AC + 3\,BB';$$

donc

$$(4) \qquad \frac{B_1B'}{IJ} < \operatorname{ch}(AC + 3BB').$$

Enfin, considérons les triangles rectangles BDB', B_1D_1B' qui ont un angle aigu commun, ainsi que les triangles rectangles HIC, EFC. Comme $BB' > B_1B'$, on a (8)

$$(5) \qquad \frac{BD}{BB'} > \frac{B_1D_1}{B_1B'};$$

de même HC, qui est la moitié de BB', est plus grand que EC, qui est la moitié de AA'; donc

$$(6) \qquad \frac{HI}{HC} > \frac{EF}{EC} \quad \text{ou} \quad \frac{IJ}{BB'} > \frac{FG}{AA'}.$$

De plus, nous avons vu dans le numéro précédent qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une longueur δ telle que, si $BB' < \delta$, on ait

$$(7) \qquad \frac{BD}{BB'} < \frac{B_1D_1}{B_1B'}(1+\varepsilon),$$

$$(8) \qquad \frac{HI}{HC} < \frac{EF}{EC}(1+\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \frac{IJ}{BB'} < \frac{FG}{AA'}(1+\varepsilon).$$

En réunissant les relations (1), ..., (8), on a

$$\operatorname{ch}(AB - BB') < \frac{BD}{AA'} < \operatorname{ch} AB,$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} BC} < \frac{FG}{B_1D_1} < \frac{1}{\operatorname{ch}(BC - BB')},$$

$$\operatorname{ch}(AC - BB') < \frac{B_1B'}{IJ} < \operatorname{ch}(AC + 3BB'),$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{BD}{BB'} < \frac{B_1D_1}{B_1B'} < \frac{BD}{BB'},$$

$$\frac{FG}{AA'} < \frac{IJ}{BB'} < \frac{FG}{AA'}(1+\varepsilon);$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{ch}(AB - BB')\operatorname{ch}(AC - BB')}{(1+\varepsilon)\operatorname{ch}BC} < 1 < \frac{\operatorname{ch}AB\operatorname{ch}(AC + 3BB')}{\operatorname{ch}(BC - BB')}(1+\varepsilon).$$

Comme cette relation doit subsister, quelque petits que soient ε et BB', il faut en conclure que

$$\operatorname{ch}BC = \operatorname{ch}AB\operatorname{ch}AC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Définition du sinus et du cosinus d'un angle.
Relations entre les éléments d'un triangle.

13. Nous avons déjà posé

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Posons en outre

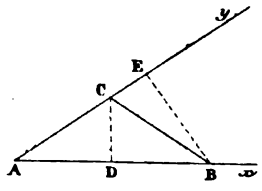
$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}, \qquad \operatorname{coth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}.$$

On en déduit

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y.$$

Ceci posé, soient xAy (*fig.* 10) un angle aigu, B un point de Ax, C un

Fig. 10.



point de Ay; menons CD perpendiculaire sur AB; les triangles rectangles ACD, BCD donnent

$$\operatorname{ch}BC = \operatorname{ch}CD\operatorname{ch}(AB - AD),$$
$$\operatorname{ch}CD = \frac{\operatorname{ch}AC}{\operatorname{ch}AD};$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} BC &= \frac{\operatorname{ch} AC}{\operatorname{ch} AD}(\operatorname{ch} AB \operatorname{ch} AD - \operatorname{sh} AB \operatorname{sh} AD)\\ &= \operatorname{ch} AB \operatorname{ch} AC - \operatorname{sh} AB \operatorname{sh} AC \frac{\operatorname{th} AD}{\operatorname{th} AC}.\end{aligned}$$

De même, en abaissant BE perpendiculaire sur AC, on a

$$\operatorname{ch} BC = \operatorname{ch} AB \operatorname{ch} AC - \operatorname{sh} AB \operatorname{sh} AC \frac{\operatorname{th} AE}{\operatorname{th} AB}.$$

Donc

$$\frac{\operatorname{th} AD}{\operatorname{th} AC} = \frac{\operatorname{th} AE}{\operatorname{th} AB};$$

comme les longueurs AB et AC sont quelconques, il faut en conclure que la valeur du rapport $\frac{\operatorname{th} AD}{\operatorname{th} AC}$ ne dépend pas de la longueur AC, mais seulement de l'angle A : c'est cette valeur qu'on appelle le *cosinus* de l'angle A et qu'on désigne par cos A, de sorte que

$$\operatorname{ch} BC = \operatorname{ch} AB \operatorname{ch} AC - \operatorname{sh} AB \operatorname{sh} AC \cos A.$$

Si l'angle A est obtus, le pied de la hauteur CD tombe sur le prolongement de BA ; on trouve, dans ce cas,

$$\operatorname{ch} BC = \operatorname{ch} AB \operatorname{ch} AC + \operatorname{sh} AB \operatorname{sh} AC \frac{\operatorname{th} AD}{\operatorname{th} AC};$$

et, en posant, par définition,

$$\cos A = -\frac{\operatorname{th} AD}{\operatorname{th} AC} = -\cos(2 \text{ droits} - A),$$

on retombe sur la formule précédente.

Ainsi les côtés a, b, c et les angles A, B, C d'un triangle sont liés par les trois relations

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a &= \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos A,\\ \operatorname{ch} b &= \operatorname{ch} c \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} a \cos B,\\ \operatorname{ch} c &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos C.\end{aligned}$$

Ensuite, en définissant le *sinus* d'un angle A aigu ou obtus comme

la valeur positive du radical $\sqrt{1-\cos^2 A}$, et en définissant la *tangente* et la *cotangente* par les formules

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A},$$

on déduit des trois relations précédentes

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C},$$

$$\operatorname{sh} a \cos B = \operatorname{ch} b \operatorname{sh} c - \operatorname{ch} c \operatorname{sh} b \cos A,$$

$$\coth a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos C + \sin C \cot A,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a.$$

En particulier, si l'on suppose que le triangle ABC est rectangle en A, on a

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c, \qquad \operatorname{th} b = \operatorname{sh} c \operatorname{tang} B,$$

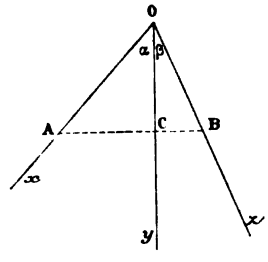
$$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} a \sin B, \qquad \operatorname{ch} a = \cot B \cot C,$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} a \cos C; \qquad \cos B = \operatorname{ch} b \sin C.$$

Formules d'addition.

14. Soient $\alpha = xOy$, $\beta = yOz$ (*fig.* 11) deux angles aigus; supposons pour fixer les idées $\alpha > \beta$, et d'un point A de Ox abaissons AC

Fig. 11.



perpendiculaire sur Oy; comme $\beta < \alpha$, le prolongement de cette perpendiculaire rencontre nécessairement Oz en un point B. Les trian-

gles OAB, OAC, OBC donnent

$$\operatorname{sh} OA \operatorname{sh} OB \cos(\alpha+\beta) = \operatorname{ch} OA \operatorname{ch} OB - \operatorname{ch}(AC+CB),$$

$$\operatorname{ch} AC \operatorname{ch} CB = \frac{\operatorname{ch} OA \operatorname{ch} OB}{\operatorname{ch}^2 OC},$$

$$\operatorname{sh} AC \operatorname{sh} CB = \operatorname{sh} OA \operatorname{sh} OB \sin\alpha \sin\beta,$$

d'où

$$\cos(\alpha+\beta) = \coth OA \coth OB \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 OC}\right) - \sin\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{\operatorname{th}^2 OC}{\operatorname{th} OA \operatorname{th} OB} - \sin\alpha \sin\beta;$$

ou

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

On trouverait de même

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Si les angles α et β sont complémentaires, $\cos(\alpha+\beta)$ est nul, donc

$$\cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \sin\beta,$$

d'où

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\beta + \cos^2\beta}} = +1,$$

puisque α et β sont aigus; donc

$$\sin\beta = \cos\alpha,$$

ou, en désignant par D l'angle droit,

$$\sin(D-\alpha) = \cos\alpha.$$

Toutes ces formules sont établies dans l'hypothèse où α et β sont aigus; mais, si l'on définit le sinus et le cosinus d'un angle quelconque A par les formules

$$\cos A = (-1)^n \cos(A - 2nD),$$
$$\sin A = (-1)^n \sin(A - 2nD),$$

en désignant toujours par D l'angle droit, et par n un entier positif

ou négatif tel que $0 < A - 2nD < 2D$, on démontre sans peine que

$$\sin(D - A) = \cos A, \qquad \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

quels que soient A et B.

On retrouve ainsi toutes les formules de la Trigonométrie ordinaire, excepté cependant celles qui dépendent du choix de l'unité d'angle.

15. Pour établir ces dernières, considérons les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ définies par les égalités

$$C(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots,$$
$$S(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Si l'on fait varier x de 0 à 2, la fonction $S(x)$ reste positive et moindre que x, et l'identité

$$C(x + h) - C(x) = -2S\left(x + \frac{h}{2}\right)S\left(\frac{h}{2}\right)$$

montre que la fonction $C(x)$ est continue et constamment décroissante dans l'intervalle considéré. Or

$$C(0) = +1, \qquad C(2) < 0,$$

donc il y a une valeur de x comprise entre 0 et 2, et une seule, qui vérifie l'équation $C(x) = 0$; c'est cette valeur qu'on représente par $\frac{\pi}{2}$:

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (^1).$$

Ensuite, en désignant par D l'angle droit et par n un nombre entier, on peut trouver un nombre α et un seul tel que

$$C(\alpha) = \cos\frac{D}{n} \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

(1) Voir *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (Note II, 6e édition).

En s'aidant des relations

$$C[(p+1)\alpha] = 2C(p\alpha)\,C(\alpha) - C[(p-1)\alpha],$$

$$\cos(p+1)\frac{D}{n} = 2\cos p\frac{D}{n}\cos\frac{D}{n} - \cos(p-1)\frac{D}{n},$$

on en déduit

$$C(p\alpha) = \cos p\frac{D}{n}$$

et, en particulier,

$$C(n\alpha) = \cos D = 0.$$

De plus, $n\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. En effet, l'égalité

$$C(x) + C(\pi - x) = 2C\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

montre que, si x est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, la fonction $C(x)$ est négative. Or, pour toutes les valeurs de p inférieures à n,

$$C(p\alpha) = \cos p\frac{D}{n} > 0;$$

donc aucun des termes de la suite

$$\alpha,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha,\quad \ldots,\quad n\alpha$$

ne peut être compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et, comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, aucun de ces termes ne peut surpasser $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $n\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$; donc, puisque $C(n\alpha) = 0$, c'est que $n\alpha = \frac{\pi}{2}$, et, par conséquent,

$$\cos\frac{D}{n} = C\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Ceci posé, soit A un angle *aigu* quelconque.

Si le rapport $\frac{A}{D}$ est commensurable, soit $\frac{A}{D} = \frac{m}{n}$.

On aura, comme plus haut,

$$\cos m\frac{D}{n} = C\left(m\frac{\pi}{2n}\right)$$

ou

$$\cos A = C\left(\frac{A}{D}\frac{\pi}{2}\right).$$

Si le rapport $\frac{A}{D}$ est incommensurable, soit

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{D} < \frac{m+1}{n},$$

on aura

$$\cos\frac{m}{n}D > \cos A > \cos\frac{m+1}{n}D,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$C\left(\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}\right) > \cos A > C\left(\frac{m+1}{n}\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais, comme la fonction $C(x)$ est décroissante dans l'intervalle de o à π, on a aussi

$$C\left(\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}\right) > C\left(\frac{A}{D}\frac{\pi}{2}\right) > C\left(\frac{m+1}{n}\frac{\pi}{2}\right);$$

d'ailleurs la différence entre les quantités $C\left(\frac{m}{n}\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(\frac{m+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$ étant moindre que $\frac{\pi}{2n}$ peut être rendue inférieure à toute quantité donnée. Donc

$$\cos A = C\left(\frac{A}{D}\frac{\pi}{2}\right),$$

formule que l'on étendra sans difficulté à toutes les valeurs positives ou négatives de A, et d'où l'on déduit

$$\sin A = S\left(\frac{A}{D}\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais, en posant

$$a = \frac{A}{D}\frac{\pi}{2},$$

rien n'empêche de *représenter* l'angle A par le nombre a : c'est ce que nous ferons désormais. Les formules précédentes deviennent alors

$$\cos a = C(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2},$$

$$\sin a = S(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}.$$

On peut, si l'on veut, considérer le nombre a comme le rapport de l'angle A à l'angle U, défini par l'égalité

$$\frac{U}{D} = \frac{2}{\pi};$$

mais, pour cela, il faut admettre *l'existence* de cet angle U.

Relations entre les côtés d'un quadrilatère trirectangle ou birectangle.

16. Soit ABCD un quadrilatère (*fig.* 12) qui a trois angles droits B, C, D. En joignant AC, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} AD &= \operatorname{sh} AC \cos ACB, \\ \operatorname{sh} BC &= \operatorname{sh} AC \sin CAB, \\ \cos ACB &= \sin CAB \operatorname{ch} AB; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\operatorname{sh} AD}{\operatorname{sh} BC} = \operatorname{ch} AB.$$

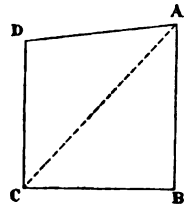
Ensuite,

$$\begin{aligned} \operatorname{th} AD &= \operatorname{sh} CD \operatorname{tang} ACD, \\ \operatorname{th} BC &= \operatorname{th} AC \ \sin ACD, \\ \operatorname{th} CD &= \operatorname{th} AC \ \cos ACD; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\operatorname{th} AD}{\operatorname{th} BC} = \operatorname{ch} CD.$$

Fig. 12.



Soit ABab (*fig.* 13) un quadrilatère qui a deux angles droits a et b. Supposons d'abord l'angle A aigu, et abaissons BD perpendiculaire sur Aa : le quadrilatère trirectangle BDab et le triangle rectangle ABD donnent

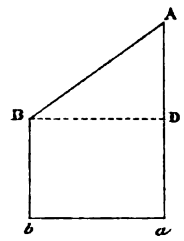
$$\operatorname{sh} Bb = \operatorname{sh} aD \operatorname{ch} BD = \operatorname{sh}(Aa - AD)\frac{\operatorname{ch} AB}{\operatorname{ch} AD} = \operatorname{ch} AB(\operatorname{sh} Aa - \operatorname{ch} Aa \operatorname{th} AD);$$

ou, en remplaçant th AD par th AB cos A,

$$\operatorname{sh} B b = \operatorname{sh} A a \operatorname{ch} AB - \operatorname{ch} A a \operatorname{sh} AB \cos A.$$

En supposant A obtus, on arriverait au même résultat.

Fig. 13.



Pour retenir cette formule, il convient de l'écrire

$$\operatorname{ch}\left(B b + \frac{\pi i}{2}\right) = \operatorname{ch}\left(A a + \frac{\pi i}{2}\right) \operatorname{ch} AB - \operatorname{sh}\left(A a + \frac{\pi i}{2}\right) \operatorname{sh} AB \cos A$$

et de regarder

$$B b + \frac{\pi i}{2}, \quad A a + \frac{\pi i}{2}, \quad AB$$

comme les côtés d'un triangle dans lequel A est l'angle opposé au côté $B b + \frac{\pi i}{2}$.

Cela revient à dire, avec Battaglini, que les droites Aa et Bb, perpendiculaires à une même droite ab, se rencontrent en un point *idéal* C, dont la distance aux deux points a et b est égale à $\frac{\pi i}{2}$.

CHAPITRE II.

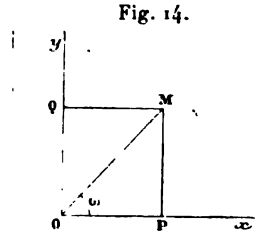
CONSTRUCTIONS.

Pour voir quelles sont les constructions que l'on peut faire en Géométrie non euclidienne *avec la règle et le compas*, il faut chercher la forme de l'équation de la ligne droite et du cercle.

Coordonnées.

17. Soient P et Q les projections d'un point M sur deux axes rectangulaires Ox, Oy.

Fig. 14.



J'appelle *coordonnées normales* du point M, et je désigne par X, Y, Z les trois quantités

$$\mathrm{sh}\,QM, \quad \mathrm{sh}\,PM, \quad \mathrm{ch}\,OM.$$

J'appelle *coordonnées homogènes* du point M, et je désigne par x, y, z trois nombres proportionnels à X, Y, Z :

$$\begin{aligned} X &= \mathrm{sh}\,QM, & x &= \lambda X, \\ Y &= \mathrm{sh}\,PM, & y &= \lambda Y, \\ Z &= \mathrm{ch}\,OM, & z &= \lambda Z, \end{aligned}$$

λ représentant n'importe quel nombre, *réel* ou *imaginaire*, autre que zéro.

Soit ω l'angle que fait OM avec Ox; comme

$$X = \operatorname{sh} OM \cos\omega,$$
$$Y = \operatorname{sh} OM \sin\omega,$$
$$Z = \operatorname{ch} OM,$$

on voit que X, Y, Z sont liés par la relation

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1.$$

D'ailleurs, $Z = \operatorname{ch} OM$ est essentiellement positif.

Quant aux coordonnées homogènes x, y, z, si elles sont réelles, elles doivent satisfaire à la condition

$$x^2 + y^2 - z^2 < 0.$$

Les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ont une signification géométrique remarquable :

$$\frac{x}{z} = \frac{\operatorname{sh} QM}{\operatorname{ch} OM} = \frac{\operatorname{th} QM}{\operatorname{ch} OQ} = \operatorname{th} OP \quad (16),$$
$$\frac{y}{z} = \frac{\operatorname{sh} PM}{\operatorname{ch} OM} = \frac{\operatorname{th} PM}{\operatorname{ch} OP} = \operatorname{th} OQ.$$

On pourrait prendre ces rapports pour coordonnées du point M : c'est ce que fait Beltrami; mais alors on serait obligé d'attribuer des valeurs infinies aux coordonnées de certains points *idéaux*. En employant des coordonnées homogènes, on évite cet inconvénient, et, en outre, on arrive à des formules plus symétriques.

Transformation des coordonnées.

18. Soient X', Y', Z' les coordonnées normales du point M relativement à un second système rectangulaire $x'O'y'$ *de même sens* que xOy, c'est-à-dire que, si l'on déplace le système xOy dans le plan de manière que Ox prenne la position $O'x'$, Oy vient s'appliquer sur $O'y'$ et non sur son prolongement.

Supposons d'abord que les deux origines O et O' coïncident.

Soient α (*fig.* 15) l'angle de Ox' avec Ox, et ω' l'angle de OM avec Ox'; on a

$$X = \operatorname{sh} OM \cos(\omega' + \alpha),$$
$$Y = \operatorname{sh} OM \sin(\omega' + \alpha),$$
$$Z = \operatorname{ch} OM = Z'.$$

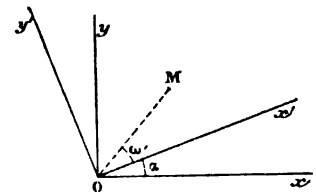
Mais

$$X' = \operatorname{sh} OM \cos\omega',$$
$$Y' = \operatorname{sh} OM \sin\omega';$$

par conséquent,

$$X = X' \cos\alpha - Y' \sin\alpha,$$
$$Y = X' \sin\alpha + Y' \cos\alpha,$$
$$Z = Z'.$$

Fig. 15.

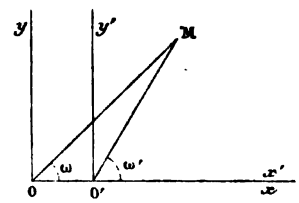


On voit que le déterminant des coefficients de X', Y', Z' dans ces formules est égal à $+1$, et qu'on a identiquement

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \equiv X'^2 + Y'^2 - Z'^2.$$

Supposons ensuite que la nouvelle origine O' (*fig.* 16) se trouve

Fig. 16.



sur Ox, et que la direction $O'x'$ coïncide avec la direction Ox. Soient

$$X_0 = \operatorname{sh} OO', \qquad Y_0 = 0, \qquad Z_0 = \operatorname{ch} OO'$$

les coordonnées de la nouvelle origine.

On a d'abord

$$Y = Y';$$

puis, dans le triangle OO'M,

$$\operatorname{sh} OM \cos\omega = \operatorname{sh} OO' \operatorname{ch} O'M + \operatorname{ch} OO' \operatorname{sh} O'M \cos\omega',$$
$$\operatorname{ch} OM = \operatorname{ch} OO' \operatorname{ch} O'M + \operatorname{sh} OO' \operatorname{sh} O'M \cos\omega';$$

c'est-à-dire

$$X = X_0 Z' + Z_0 X',$$
$$Z = Z_0 Z' + X_0 X'.$$

Ainsi les formules de transformation sont

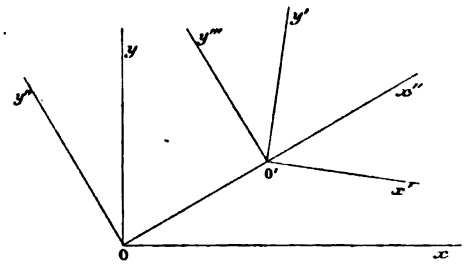
$$X = Z_0 X' + X_0 Z',$$
$$Y = Y',$$
$$Z = X_0 X' + Z_0 Z'.$$

Ici encore, le déterminant des coefficients de X', Y', Z' est égal à $+1$, et l'on a identiquement

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \equiv X'^2 + Y'^2 - Z'^2.$$

Considérons enfin le cas général. Soit $O'x''$ (*fig.* 17) le prolongement

Fig. 17.



de OO'; pour passer du système xOy au système $x'O'y'$, on peut prendre deux systèmes intermédiaires $x''Oy''$, $x''O'y'''$ ayant un axe commun; et alors on voit par ce qui précède que les formules générales de transformation sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} X = aX' + a'Y' + a''Z', \\ Y = bX' + b'Y' + b''Z', \\ Z = cX' + c'Y' + c''Z', \end{cases}$$

et que les neuf coefficients a, b, c, ... sont des nombres réels satisfaisant à l'identité

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \equiv X'^2 + Y'^2 - Z'^2$$

et à la condition

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = +1.$$

Il est clair que, si les deux systèmes xOy, $x'O'y'$ étaient de *sens contraire*, le déterminant précédent serait égal à -1.

L'identité $X^2 + Y^2 - Z^2 \equiv X'^2 + Y'^2 - Z'^2$ équivaut aux six conditions

$$(2) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = 1, & aa' + bb' - cc' = 0, \\ a'^2 + b'^2 - c'^2 = 1, & a'a'' + b'b'' - c'c'' = 0, \\ a''^2 + b''^2 - c''^2 = -1, & a''a + b''b - c''c = 0, \end{cases}$$

qui permettent de résoudre les formules (1) par rapport à X', Y', Z'; on trouve

$$(3) \quad \begin{cases} X' = aX + bY - cZ, \\ Y' = a'X + b'Y - c'Z, \\ Z' = -a''X - b''Y + c''Z. \end{cases}$$

Il en résulte que, entre les coordonnées homogènes x, y, z du point M dans le système xOy et les coordonnées homogènes x', y', z' du même point dans le système $x'O'y'$, il existe les relations

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda x' = ax + by - cz, \\ \lambda y' = a'x + b'y - c'z, \\ \lambda z' = -a''x - b''y + c''z, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\lambda^2(x'^2 + y'^2 - z'^2) \equiv x^2 + y^2 - z^2,$$

λ désignant un nombre quelconque différent de zéro.

En faisant

$$X' = 0, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = 1$$

dans les formules (1), on voit que a'', b'', c'' sont les coordonnées nor-

males de la nouvelle origine O′ dans l'ancien système. En désignant ces coordonnées par X_0, Y_0, Z_0, la dernière des formules (3),

$$Z' = -a''X - b''Y + c''Z,$$

devient

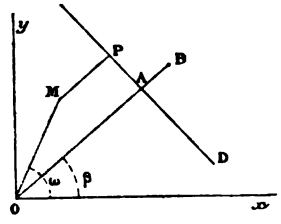
$$\operatorname{ch} O'M = -X_0 X - Y_0 Y + Z_0 Z,$$

formule qui donne la distance de deux points quelconques O′ et M, et que nous retrouverons plus loin.

Distance d'un point à une droite. Coordonnées d'une droite. Équation d'une droite ou d'un point.

19. Soient MP la distance du point M à la droite D (*fig.* 18), et OA la

Fig. 18.



perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite. Dans le quadrilatère birectangle OAPM, on a (16)

$$\operatorname{sh} MP = \operatorname{sh} OA \operatorname{ch} OM - \operatorname{ch} OA \operatorname{sh} OM \cos \widehat{AOM}.$$

Considérons un point *fixe* B situé sur le prolongement de OA, du côté de A ou du côté de O ; si nous regardons la distance MP comme positive quand les points M et B sont de part et d'autre de la droite D, et comme négative dans le cas contraire, et que nous fassions la même convention pour la distance OA, nous aurons dans tous les cas

$$\operatorname{sh} MP = \operatorname{sh} OA \operatorname{ch} OM - \operatorname{ch} OA \operatorname{sh} OM \cos \widehat{BOM},$$

ou, en désignant par ω et β les angles que OM et OB font avec Ox,

$$\operatorname{sh} MP = \operatorname{sh} OA \operatorname{ch} OM - \operatorname{ch} OA \operatorname{sh} OM \cos(\omega - \beta),$$

ou enfin

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sh} MP = WZ - VY - UX,$$

en posant

$$U = \operatorname{ch} OA \cos\beta, \qquad X = \operatorname{sh} OM \cos\omega,$$
$$V = \operatorname{ch} OA \sin\beta, \qquad Y = \operatorname{sh} OM \sin\omega,$$
$$W = \operatorname{sh} OA, \qquad Z = \operatorname{ch} OM.$$

X, Y, Z sont les coordonnées normales du point M; par analogie, nous dirons que U, V, W sont *les coordonnées normales de la droite* D. En changeant le sens de la direction OB, on aurait un second système de coordonnées normales $-U$, $-V$, $-W$.

J'appelle *coordonnées homogènes de la droite* D trois nombres réels ou imaginaires u, v, w proportionnels à U, V, W.

On voit que U, V, W sont liés par la relation

$$U^2 + V^2 - W^2 = +1,$$

et que les coordonnées homogènes u, v, w doivent satisfaire, quand elles sont réelles, à la condition

$$u^2 + v^2 - w^2 > 0.$$

Si l'on définit le point M et la droite D par des coordonnées homogènes, la formule (1) devient

$$\operatorname{sh} MP = \frac{wz - vy - ux}{\sqrt{u^2 + v^2 - w^2}\sqrt{z^2 - y^2 - x^2}}.$$

Ainsi l'équation

$$ux + vy - wz = 0$$

peut être regardée soit comme l'équation *ponctuelle* de la droite D, soit comme l'équation *tangentielle* du point M.

Formules de transformation.

20. Soient X′, Y′, Z′ et U′, V′, W′ les coordonnées normales du point M et de la droite D relativement à un second système $x'O'y'$.

On a aussi

$$\operatorname{sh} MP = W'Z' - V'Y' - U'X',$$

d'où

$$UX + VY - WZ = U'X' + V'Y' - W'Z';$$

et cette égalité doit devenir une identité quand on y remplace soit X', Y', Z' par leurs valeurs en fonction de X, Y, Z données par les formules (3) du n° 18, soit X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de X', Y', Z'. On trouve ainsi

$$(1) \qquad \begin{cases} U = aU' + a'V' + a''W', \\ V = bU' + b'V' + b''W', \\ W = cU' + c'V' + c''W'; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} U' = aU + bV - cW, \\ V' = a'U + b'V - c'W, \\ W = -a''U - b''V + c''W. \end{cases}$$

Par conséquent, les formules de transformation pour les coordonnées tangentielles sont les mêmes que pour les coordonnées ponctuelles; la raison en est que les coordonnées d'une droite sont, comme nous le verrons plus loin, les coordonnées d'un point *idéal* qu'on appelle le *pôle* de cette droite.

Il résulte des formules précédentes que, entre les coordonnées homogènes u, v, w de la droite D dans le système xOy et les coordonnées homogènes u', v', w' de la même droite dans le système $x'O'y'$, on a les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda u' = au + bv - cw, \\ \lambda v' = a'u + b'v - c'w, \\ \lambda w' = -a''u - b''v + c''w, \end{cases}$$

d'où

$$\lambda^2(u'^2 + v'^2 - w'^2) \equiv u^2 + v^2 - w^2.$$

Si, dans les formules (1), on fait

$$U' = 0, \qquad V' = 1, \qquad W' = 0,$$

on voit que les coordonnées normales de $O'x'$ dans le système xOy sont a', b', c'. De même, a, b, c sont les coordonnées normales de $O'y'$.

Mais si la droite D passe par la nouvelle origine O' (*fig.* 19), en menant O'N perpendiculaire sur cette droite, on a, par définition,

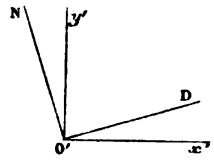
$$V' = \sin\widehat{x'N} = \pm\cos\widehat{x'D};$$

or

$$V' = a'U + b'V - c'W,$$

et nous venons de voir que a', b', c' sont les coordonnées normales de

Fig. 19.



$O'x'$ dans le système xOy; donc, en désignant ces coordonnées par U_0, V_0, W_0, on a

$$\pm \cos \widehat{x'D} = UU_0 + VV_0 - WW_0,$$

formule qui donne l'angle de deux droites et que nous retrouverons plus loin.

Droites et points imaginaires, réels, limites ou idéaux.

21. Soit x, y, z un système quelconque de trois nombres réels ou imaginaires *qui ne soient pas tous nuls*, on convient de dire que ces trois nombres sont les coordonnées d'un point.

On dit que deux points sont *identiques* quand leurs coordonnées sont proportionnelles.

x, y, z étant donnés, on considère les nombres x', y', z' définis par les formules (4) du n° 18 comme les coordonnées dans le système $x'O'y'$ du point qui a pour coordonnées x, y, z dans le système xOy.

On dit qu'un point est *imaginaire* quand ses coordonnées x, y, z ne sont pas proportionnelles à trois nombres réels.

Si, au contraire, x, y, z sont proportionnels à trois nombres réels x_0, y_0, z_0, on dit que le point x, y, z est

réel si $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 < 0$,
limite si $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$,
idéal si $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 > 0$.

Soit u, v, w un système quelconque de trois nombres réels ou imaginaires *qui ne soient pas tous nuls*, on convient de dire que ces trois nombres sont les coordonnées d'une droite.

On dit que deux droites sont *identiques* quand leurs coordonnées sont proportionnelles.

u, v, w étant donnés, on considère les nombres u', v', w' définis par les formules (3) du n° 20 comme les coordonnées dans le système $x'O'y'$ de la droite qui a pour coordonnées u, v, w dans le système xOy.

On dit qu'une droite est *imaginaire* quand ses coordonnées u, v, w ne sont pas proportionnelles à trois nombres réels.

Si, au contraire, u, v, w sont proportionnels à trois nombres réels u_0, v_0, w_0, on dit que la droite u, v, w est

réelle si $u_0^2 + v_0^2 - w_0^2 > 0$,
limite si $u_0^2 + v_0^2 - w_0^2 = 0$,
idéale si $u_0^2 + v_0^2 - w_0^2 < 0$.

Les formules qui déterminent x', y', z' en fonction de x, y, z montrent d'ailleurs que, si un point est imaginaire dans le système xOy, il l'est aussi dans le système $x'Oy'$. De même, s'il est réel, limite ou idéal.

On dit qu'un point x, y, z est sur une droite u, v, w lorsque

$$ux + vy - wz = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2 z_2 deux points d'une droite, tous les autres points de cette droite auront des coordonnées de la forme

$$\begin{aligned} x &= \lambda x_1 + \mu x_2, \\ y &= \lambda y_1 + \mu y_2, \\ z &= \lambda z_1 + \mu z_2. \end{aligned}$$

Les formules qui déterminent u', v', w' en fonction de u, v, w montrent d'ailleurs que, si une droite est imaginaire dans le système xOy, elle l'est aussi dans le système $x'O'y'$. De même, si elle est réelle, limite ou idéale.

On dit qu'une droite u, v, w passe par un point x, y, z lorsque

$$ux + vy - wz = 0.$$

Soient u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 deux des droites qui passent par un point, toutes les droites passant par ce point ont des coordonnées de la forme

$$\begin{aligned} u &= \lambda u_1 + \mu u_2, \\ v &= \lambda v_1 + \mu v_2, \\ w &= \lambda w_1 + \mu w_2. \end{aligned}$$

On dit qu'un point x, y, z est sur le *cercle limite* lorsque

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

et alors, les coordonnées x', y', z' de ce point dans un autre système de coordonnées vérifient aussi la relation

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0;$$

donc l'équation du cercle limite est

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

dans tous les systèmes de coordonnées.

On dit qu'une droite u, v, w est *tangente au cercle limite* quand elle n'a qu'un point commun avec lui, c'est-à-dire quand les deux solutions du système

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \\ ux + vy - wz &= 0, \end{aligned}$$

sont confondues, ce qui arrive lorsque

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0;$$

et alors les coordonnées u', v', w' de cette droite dans un autre système

de coordonnées vérifient aussi la relation

$$u'^2 + v'^2 - w'^2 = 0;$$

donc l'équation tangentielle du cercle limite est

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0$$

dans tous les systèmes de coordonnées.

Rapport anharmonique.

22. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points situés sur une même droite et définis par leurs coordonnées x_i, y_i, z_i.

Si les deux premiers points sont distincts, les coordonnées des deux derniers sont de la forme

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda x_1 + \mu x_2, & x_4 &= \lambda' x_1 + \mu' x_2, \\ y_3 &= \lambda y_1 + \mu y_2, & y_4 &= \lambda' y_1 + \mu' y_2, \\ z_3 &= \lambda z_1 + \mu z_2; & z_4 &= \lambda' z_1 + \mu' z_2; \end{aligned}$$

et alors les trois rapports

$$\frac{y_1 z_3 - z_1 y_3}{y_2 z_3 - z_2 y_3} : \frac{y_1 z_4 - z_1 y_4}{y_2 z_4 - z_2 y_4},$$

$$\frac{z_1 x_3 - x_1 z_3}{z_2 x_3 - x_2 z_3} : \frac{z_1 x_4 - x_1 z_4}{z_2 x_4 - x_2 z_4},$$

$$\frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3} : \frac{x_1 y_4 - y_1 x_4}{x_2 y_4 - y_2 x_4}$$

ont pour valeur commune

$$\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'};$$

et cette valeur commune ne change pas ni quand on multiplie par un même nombre les coordonnées de l'un des quatre points, ni quand on rapporte ces quatre points à un autre système de coordonnées.

D'ailleurs, si les deux premiers points coïncident, nos trois rapports sont évidemment égaux à l'unité.

C'est la valeur commune de ces trois rapports qu'on appelle le *rapport anharmo-*

Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites passant par un même point et définies par leurs coordonnées u_i, v_i, w_i.

Si les deux premières sont distinctes, les coordonnées des deux dernières sont de la forme

$$\begin{aligned} u_3 &= \lambda u_1 + \mu u_2. & u_4 &= \lambda' u_1 + \mu u'_2, \\ v_3 &= \lambda v_1 + \mu v_2, & v_4 &= \lambda' v_1 + \mu' v_2, \\ w_3 &= \lambda w_1 + \mu w_2; & w_4 &= \lambda' w_1 + \mu' w_2; \end{aligned}$$

et alors les trois rapports

$$\frac{v_1 w_3 - w_1 v_3}{v_2 w_3 - w_2 v_3} : \frac{v_1 w_4 - w_1 v_4}{v_2 w_4 - w_2 v_4},$$

$$\frac{w_1 u_3 - u_1 w_3}{w_2 u_3 - u_2 w_3} : \frac{w_1 u_4 - u_1 w_4}{w_2 u_4 - u_2 w_4},$$

$$\frac{u_1 v_3 - v_1 u_3}{u_2 v_3 - v_2 u_3} : \frac{u_1 v_4 - v_1 u_4}{u_2 v_4 - v_2 u_4}$$

ont pour valeur commune

$$\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'};$$

et cette valeur commune ne change pas ni quand on multiplie par un même nombre les coordonnées de l'une des quatre droites, ni quand on rapporte ces quatre droites à un autre système de coordonnées.

D'ailleurs, si les deux premières droites coïncident, nos trois rapports sont évidemment égaux à l'unité.

C'est la valeur commune de ces trois rapports qu'on appelle le *rapport anharmo-*

nique des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 et qu'on désigne par le symbole

$$(A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Pour trouver la signification géométrique du rapport anharmonique de quatre points *géométriques*, prenons pour axe des x la droite sur laquelle ils sont situés, et alors, en remplaçant les coordonnées x et z par leurs valeurs dans

$$\frac{z_1 x_3 - x_1 z_3}{z_2 x_3 - x_2 z_3} : \frac{z_1 x_4 - x_1 z_4}{z_2 x_4 - x_2 z_4},$$

on trouve

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{\operatorname{sh} A_1 A_3}{\operatorname{sh} A_2 A_3} : \frac{\operatorname{sh} A_1 A_4}{\operatorname{sh} A_2 A_4}.$$

nique des quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 et qu'on désigne par le symbole

$$(D_1 D_2 D_3 D_4).$$

Pour trouver la signification géométrique du rapport anharmonique de quatre droites *géométriques*, prenons pour origine leur point de concours, et alors, en remplaçant les coordonnées u et v par leurs valeurs dans

$$\frac{u_1 v_3 - v_1 u_3}{u_2 v_3 - v_2 u_3} : \frac{u_1 v_4 - v_1 u_4}{u_2 v_4 - v_2 u_4},$$

on trouve

$$(D_1 D_2 D_3 D_4) = \frac{\sin D_1 D_3}{\sin D_2 D_3} : \frac{\sin D_1 D_4}{\sin D_2 D_4}.$$

Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite A_1, A_2, A_3, A_4 *est égal à celui des quatre droites qui les joignent à un point extérieur* x_0, y_0, z_0. Car, en désignant les coordonnées des quatre points comme ci-dessus, les équations des deux premières droites sont

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

et celles des deux autres sont

$$\lambda D_1 + \mu D_2 = 0,$$
$$\lambda' D_1 + \mu' D_2 = 0:$$

donc le rapport anharmonique des quatre droites et celui des quatre points ont pour valeur commune $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$.

Dans le cas où A_1, A_2, A_3, A_4 et le point extérieur O sont des points *géométriques*, en abaissant OH perpendiculaire sur la droite des quatre points, on peut écrire

$$\operatorname{sh} A_1 A_3 \operatorname{sh} OH = \operatorname{sh} OA_1 \operatorname{sh} OA_3 \sin A_1 OA_3$$

et trois autres relations analogues. On en déduit

$$\frac{\operatorname{sh} A_1 A_3}{\operatorname{sh} A_2 A_3} : \frac{\operatorname{sh} A_1 A_4}{\operatorname{sh} A_2 A_4} = \frac{\sin A_1 OA_3}{\sin A_2 OA_3} : \frac{\sin A_1 OA_4}{\sin A_2 OA_4}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi les raisonnements basés sur la considération du rapport anharmonique, en particulier, la théorie des pôles et polaires et les propriétés harmoniques du quadrangle et du quadrilatère subsistent en Géométrie non euclidienne.

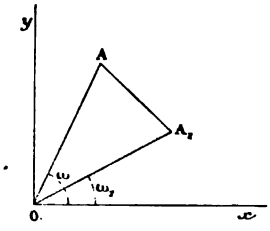
Pour abréger, nous appellerons *pôle* d'une droite ou *polaire* d'un point le pôle de cette droite ou la polaire de ce point *par rapport au cercle limite* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

La polaire d'un point réel est une droite idéale, et la polaire d'un point idéal est une droite réelle.

Distance de deux points.

23. Soient A et A_1 deux points *géométriques* définis par des coordonnées homogènes x, y, z et x_1, y_1, z_1. Joignons ces deux points à

Fig. 20.



l'origine O (*fig.* 20); en désignant par ω et par ω_1 les angles que OA et OA_1 font avec Ox, le triangle OAA_1 donne

$$\operatorname{ch} AA_1 = \operatorname{ch} OA \operatorname{ch} OA_1 - \operatorname{sh} OA \operatorname{sh} OA_1 \cos(\omega - \omega_1),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{ch} AA_1 = \frac{zz_1 - yy_1 - xx_1}{\sqrt{z^2 - y^2 - x^2}\sqrt{z_1^2 - y_1^2 - x_1^2}}.$$

En posant

$$P = z^2 - y^2 - x^2,$$
$$P_1 = z_1^2 - y_1^2 - x_1^2,$$
$$Q = zz_1 - yy_1 - xx_1,$$

on en déduit

$$\operatorname{th} AA_1 = \frac{\sqrt{Q^2 - PP_1}}{Q},$$

d'où

$$e^{2AA_1} = \frac{Q + \sqrt{Q^2 - PP_1}}{Q - \sqrt{Q^2 - PP_1}},$$

ou

$$e^{2AA_1} = \frac{\mu'}{\lambda'} : \frac{\mu''}{\lambda''},$$

en désignant par $\frac{\mu'}{\lambda'}$, $\frac{\mu''}{\lambda''}$ les racines de l'équation

$$P + 2Q\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + P_1\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 = 0.$$

Mais cette équation exprime que le point de la droite AA_1 dont les coordonnées sont

$$\lambda x + \mu x_1, \quad \lambda y + \mu y_1, \quad \lambda z + \mu z_1$$

appartient au cercle limite $z^2 - y^2 - x^2 = 0$. Donc, si A′ et A″ sont les points d'intersection de la droite AA_1 avec le cercle limite, le rapport $\frac{\mu'}{\lambda'} : \frac{\mu''}{\lambda''}$ est précisément le rapport anharmonique des quatre points A, A_1, A', A''; et, par conséquent,

$$AA_1 = \frac{1}{2}\log(AA_1A'A'').$$

Nous avons supposé que A et A_1 sont deux points géométriques; mais, s'il s'agit de deux points quelconques, nous définirons la distance AA_1 par l'égalité précédente. Ainsi :

La distance de deux points est le demi-logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux points avec les deux points où la droite qui les joint rencontre le cercle limite (Klein).

En partant de cette définition et en refaisant les calculs précédents en sens inverse, on retrouve la formule

$$\operatorname{ch} AA_1 = \frac{zz_1 - yy_1 - xx_1}{\sqrt{z^2 - y^2 - x^2}\sqrt{z_1^2 - y_1^2 - x_1^2}}.$$

Comme on peut permuter les points A′ et A″, la distance AA_1 est susceptible de deux séries de valeurs de la forme

$$n\pi i \pm \delta,$$

δ étant l'une de ces valeurs. Ces deux séries correspondent aux deux directions que l'on peut considérer sur la droite AA_1 ; πi est la *période,* c'est-à-dire la longueur de la droite entière.

La distance AA_1 est égale à une demi-période $\frac{\pi i}{2}$ quand

$$(AA_1A'A'') = -1,$$

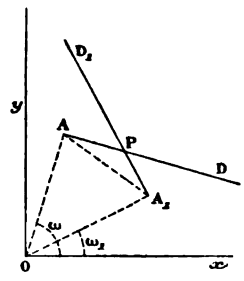
c'est-à-dire quand les points A et A_1 sont conjugués par rapport au cercle limite.

Enfin la distance AA_1 est infinie quand l'un des points A ou A_1 est sur le cercle limite : d'où le nom de *cercle de l'infini* qu'on donne habituellement au cercle limite.

Angle de deux droites.

24. Soient D et D_1 (*fig.* 21) deux droites *géométriques* qui se coupent en un point P ; et soient OA et OA_1 les perpendiculaires abaissées

Fig. 21.



de l'origine sur ces deux droites. Désignons par ω et par ω_1 les angles que OA et OA_1 font avec Ox; le triangle PAA_1 montre que $\pm \cos DD_1$ a pour valeur

$$-\sin OAA_1 \sin OA_1A + \cos OAA_1 \cos OA_1A \operatorname{ch} AA_1$$

et, en considérant le triangle OAA_1, on voit que cette valeur est égale à

$$\operatorname{sh} OA \operatorname{sh} OA_1 - \operatorname{ch} OA \operatorname{ch} OA_1 \cos(\omega - \omega_1);$$

donc, en définissant les droites D, D_1 par des coordonnées homogènes

$$u = \lambda \operatorname{ch} OA \cos\omega, \qquad u_1 = \lambda_1 \operatorname{ch} OA_1 \cos\omega_1,$$
$$v = \lambda \operatorname{ch} OA \sin\omega, \qquad v_1 = \lambda_1 \operatorname{ch} OA_1 \sin\omega_1,$$
$$w = \lambda \operatorname{sh} OA, \qquad w_1 = \lambda_1 \operatorname{sh} OA_1,$$

on a

$$\cos DD_1 = \frac{ww_1 - vv_1 - uu_1}{\sqrt{u^2 + v^2 - w^2}\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - w_1^2}},$$

formule déjà trouvée au n° 20.

En raisonnant comme au numéro précédent, on trouve que, en appelant D′ et D″ les tangentes au cercle limite issues du point P,

$$\widehat{DD_1} = \frac{1}{2i}\log(DD_1D'D''),$$

Pour établir cette formule, nous avons supposé que D et D_1 sont deux droites géométriques concourantes; s'il s'agit de deux droites quelconques, nous définirons l'angle $\widehat{DD_1}$ par cette formule même. Ainsi :

L'angle de deux droites est le produit de $\frac{1}{2i}$ *par le logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux droites avec les tangentes au cercle limite menées par leur point de concours* (Klein).

En partant de cette définition, on retrouve la formule

$$\cos DD_1 = \frac{ww_1 - vv_1 - uu_1}{\sqrt{u^2 + v^2 - w^2}\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - w_1^2}}.$$

Comme on peut permuter D′ et D″, l'angle DD_1 a deux séries de valeurs

$$n\pi \pm \alpha,$$

α étant l'une de ces valeurs.

La période est π : c'est l'angle que doit décrire une droite en tournant autour de l'un de ses points pour revenir s'appliquer sur elle-même.

L'angle DD_1 est égal à une demi-période $\frac{\pi}{2}$ quand

$$(DD_1D'D'') = -1,$$

c'est-à-dire quand les droites D et D_1 sont conjuguées par rapport au cercle limite.

Ainsi toutes les perpendiculaires à une droite passent par son *pôle*. Deux droites ont toujours une perpendiculaire commune, savoir la *polaire* de leur point de concours, mais cette perpendiculaire commune n'est réelle que si les deux droites se rencontrent en un point idéal.

Hauteurs d'un triangle.

25. *Les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point* RÉEL, LIMITE *ou* IDÉAL.

Ce théorème est vrai, quelle que soit la nature des côtés ou des sommets du triangle, et se démontre comme en Géométrie euclidienne.

En effet, soient

$$D_i \equiv zz_i - yy_i - xx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les équations des trois côtés du triangle; en remarquant que la condition de perpendicularité de deux droites u, v, w et u_1, v_1, w_1 est

$$ww_1 - vv_1 - uu_1 = 0,$$

et en posant

$$P_{ij} = z_i z_j - y_i y_j - x_i x_j,$$

on voit que les trois hauteurs ont pour équations

$$D_1 P_{23} = D_2 P_{31} = D_3 P_{12}$$

et, par conséquent, concourent en un même point.

Droites parallèles.

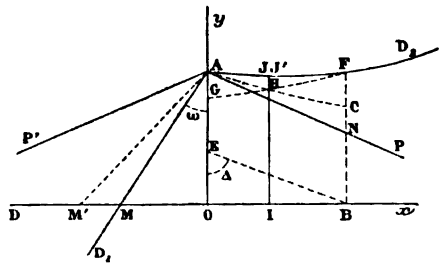
26. Lorsque deux droites D et D_1 se coupent sur le cercle limite, les tangentes D′ et D″ au cercle limite menées par leur point de concours se confondent; et alors, le rapport anharmonique $(DD_1D'D'')$ étant égal à l'unité, l'angle des deux droites D et D_1 est nul.

Étant donnés un point géométrique A (*fig.* 22) et une droite géométrique D, nous allons montrer qu'on peut *construire* les deux droites

qui joignent le point A aux points d'intersection de la droite D avec le cercle limite.

Prenons pour axe des x la droite D et pour axe des y la perpendicu-

Fig. 22.



laire abaissée du point A sur la droite D, et posons, pour abréger,

$$OA = \delta.$$

L'équation d'une droite passant par le point A et faisant un angle ω avec l'axe des y est de la forme

$$\frac{x}{\operatorname{sh}\delta \operatorname{tang}\omega} + \frac{y}{\operatorname{th}\delta} - z = 0;$$

les coordonnées du point où cette droite rencontre l'axe des x satisfont à la relation

$$z^2 - y^2 - x^2 = z^2(1 - \operatorname{sh}^2\delta \operatorname{tang}^2\omega);$$

donc ce point est réel, limite ou idéal, selon que $\operatorname{tang}\omega$ est inférieur, égal ou supérieur à $\frac{1}{\operatorname{sh}\delta}$.

Mais Bolyai a montré que l'on peut *construire* un angle dont la tangente soit égale à $\frac{1}{\operatorname{sh}\delta}$.

En effet, menons BF perpendiculaire à Ox en un point quelconque B, abaissons AC perpendiculaire sur BF, et, du point B comme centre avec AC pour rayon, décrivons un arc de cercle qui rencontre nécessairement OA en un point E, car $AC > BO$: l'angle OEB est l'angle cherché. Car, en désignant cet angle par Δ, on a (16)

$$(1) \qquad \sin\Delta = \frac{\operatorname{sh} OB}{\operatorname{sh} AC} = \frac{1}{\operatorname{ch}\delta},$$

d'où

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tang}\Delta = \frac{1}{\operatorname{sh}\delta}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Par conséquent, si l'on mène par le point A deux droites AP et AP′ faisant avec AO un angle égal à Δ, ces deux droites AP et AP′ passeront par les points d'intersection de la droite D avec le cercle limite.

D'après ce qu'on a vu plus haut, une droite AD_1 qui passe par le point A et qui fait avec AO un angle ω moindre que Δ rencontre la droite D en un point *réel;* mais il n'en résulte pas que ce point *ait une existence géométrique :* il faut le démontrer.

Il ne servirait à rien de dire que, $\operatorname{sh}\delta \operatorname{tang}\omega$ étant moindre que l'unité, la droite AD_1 rencontre la droite D en un point M tel que $\operatorname{th} OM = \operatorname{sh}\delta \operatorname{tang}\omega$; car nous admettons bien qu'il existe un *nombre* μ tel que $\operatorname{th}\mu = \operatorname{sh}\delta \operatorname{tang}\omega$, mais nous n'admettons pas qu'il existe nécessairement une *longueur* OM qui ait pour mesure ce nombre μ.

Pour lever la difficulté, remarquons qu'on peut trouver sur OD un point M′ tel que

$$\operatorname{th} OM' > \operatorname{sh}\delta \operatorname{tang}\omega;$$

il en résulte que l'angle OAM′ est plus grand que l'angle ω, et alors la droite AD_1, tombant à l'intérieur de l'angle OAM′, rencontre nécessairement OM′ en un point M. C. Q. F. D.

Considérons maintenant une droite AD_2 faisant avec AO un angle *aigu* OAD_2 plus grand que Δ. Au point de vue géométrique, les deux droites D et D_2 ne se rencontrent pas; mais on peut construire une perpendiculaire commune à ces deux droites. En effet, nous savons (8) qu'on peut trouver sur AD_2 un point F dont la distance à la droite AP soit plus grande que AO, et alors, en abaissant FB perpendiculaire sur Ox, on aura, à plus forte raison, $FB > AO$; donc, dans le quadrilatère birectangle AOBF, l'angle F est aigu (6). Mais l'angle OAF est aussi aigu, par hypothèse; par conséquent, les perpendiculaires AC et FG abaissées des points A et F sur BF et sur AO se coupent nécessairement en un point H, et, dans le triangle AHF, la hauteur HJ, issue du point H, passe par le point de concours des deux autres hauteurs AG et FC (25), c'est-à-dire qu'elle est perpendiculaire à OB :

ainsi cette hauteur HJ est à la fois perpendiculaire aux deux droites D et D_2.

D'ailleurs on peut le vérifier. En effet, abaissons HI perpendiculaire sur OB. On a (16)

$$\frac{\operatorname{th} OA}{\operatorname{th} IH} = \frac{\operatorname{ch} OB}{\operatorname{ch} IB},$$
$$\frac{\operatorname{th} BF}{\operatorname{th} IH} = \frac{\operatorname{ch} OB}{\operatorname{ch} OI};$$

ensuite, en abaissant AJ et FJ′ perpendiculaires sur IH,

$$\operatorname{th} OA = \operatorname{th} IJ \operatorname{ch} OI,$$
$$\operatorname{th} BF = \operatorname{th} IJ' \operatorname{ch} IB,$$

d'où IJ = IJ′; donc les points J, J′ coïncident. C. Q. F. D.

Ainsi, étant donnés un point A et une droite D, nous avons pu construire deux droites AP et AP′ telles qu'une droite passant par le point A rencontre ou ne rencontre pas la droite D, selon qu'elle est ou n'est pas située dans l'angle PAP′.

Lobatschewsky exprime ce fait en disant que les deux droites AP et AP′ sont *parallèles* à D, l'une dans un sens, l'autre dans l'autre.

A notre point de vue, deux droites sont parallèles quand elles se coupent sur le cercle de l'infini; il en résulte immédiatement que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

L'angle Δ, que nous avons appris à construire, s'appelle l'*angle de parallélisme* correspondant à la distance δ; Lobatschewsky le désigne par $\Pi(\delta)$:

$$\Delta = \Pi(\delta).$$

Il est défini par les formules (1) et (2), ou encore par

$$\cos\Delta = \operatorname{th}\delta. \tag{3}$$

Cette dernière formule permet de démontrer que deux parallèles sont *asymptotes* l'une à l'autre. En effet, d'un point N de AP abaissons NB perpendiculaire sur Ox; le quadrilatère birectangle OANB donne (16)

$$\operatorname{sh} BN = \operatorname{sh}\delta \operatorname{ch} AN - \operatorname{ch}\delta \operatorname{sh} AN \cos\Delta;$$

d'où, en remplaçant $\cos\Delta$ par $\operatorname{th}\delta$,

$$\operatorname{sh} NB = \operatorname{sh}\delta\, e^{-AN};$$

donc NB tend vers zéro lorsque AN augmente indéfiniment.

En résumé, deux droites étant données, ou bien elles se coupent, ou bien elles ont une perpendiculaire commune, ou bien elles se rapprochent indéfiniment sans jamais se rencontrer.

Cette proposition était connue longtemps avant Lobatschewsky (voir *Saccherii Euclides ab omni nævo vindicatus*. Mediolani; 1723).

Triangles polaires.

27. Soient D et D_1 deux droites, A et A_1 leurs pôles, D′ et D″ les tangentes au cercle limite menées par leur point de concours; les points de contact A′ et A″ de ces tangentes sont situés sur la droite AA_1, et

$$(DD_1D'D'') = (AA_1A'A''),$$

par conséquent,

$$\widehat{DD_1} = \frac{1}{i} AA_1;$$

l'angle de deux droites est égal au produit de $\frac{1}{i}$ *par la distance de leurs pôles.*

Donc on peut dire, dans un certain sens, que, si l'on a deux triangles tels que les sommets de l'un soient les pôles de l'autre, les angles de l'un sont égaux aux côtés de l'autre multipliés par $\frac{1}{i}$.

Mais, comme l'angle de deux droites et la distance de deux points sont susceptibles chacun de deux séries de valeurs, si l'on veut arriver à un énoncé précis, il faut auparavant définir ce qu'on entend par *côtés* et par *angles* d'un triangle.

Soient A_1, A_2, A_3 trois points définis par leurs coordonnées x_i, y_i, z_i. Les coordonnées des trois droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sont les mineurs du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -z_1 \\ x_2 & y_2 & -z_2 \\ x_3 & y_3 & -z_3 \end{vmatrix};$$

et ces mineurs, que je désigne par x'_i, y'_i, z'_i, sont aussi les coordonnées des pôles A'_1, A'_2, A'_3 de ces trois droites.

Les distances A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 et les angles $A_3A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_1$ sont susceptibles chacun d'une infinité de valeurs. Désignons par

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

un système de valeurs de ces six quantités, et posons, pour abréger,

$$P_{ij} = z_i z_j - y_i y_j - x_i x_j,$$
$$P'_{ij} = z'_i z'_j - y'_i y'_j - x'_i x'_j;$$

nous aurons

$$\operatorname{ch}^2 a_1 = \frac{P_{23}^2}{P_{22}P_{33}},\qquad \operatorname{ch}^2 a_2 = \frac{P_{31}^2}{P_{33}P_{11}},\qquad \operatorname{ch}^2 a_3 = \frac{P_{12}^2}{P_{11}P_{22}};$$
$$\cos^2 A_1 = \frac{P'^2_{23}}{P'_{22}P'_{33}},\qquad \cos^2 A_2 = \frac{P'^2_{31}}{P'_{33}P'_{11}},\qquad \cos^2 A_3 = \frac{P'^2_{12}}{P'_{11}P'_{22}};$$

d'où, en s'aidant des identités

$$P'_{23} = P_{12}P_{13} - P_{11}P_{23},$$
$$P'_{11} = P_{22}P_{33} - P_{23}^2,$$
$$\Delta^2 P_{11} = P'_{22}P'_{33} - P'^2_{23}$$

et autres analogues, on déduit d'abord

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos^2 A_1 = \dfrac{(P_{12}P_{13} - P_{11}P_{23})^2}{(P_{33}P_{11} - P_{31}^2)(P_{11}P_{22} - P_{12}^2)} = \dfrac{(\operatorname{ch} a_2 \operatorname{ch} a_3 - \varepsilon \operatorname{ch} a_1)^2}{\operatorname{sh}^2 a_2 \operatorname{sh}^2 a_3}, \\ \text{avec} \\ \qquad \varepsilon = \operatorname{ch} a_1 \operatorname{ch} a_2 \operatorname{ch} a_3 \dfrac{P_{11}P_{22}P_{33}}{P_{23}P_{31}P_{12}} = \pm 1; \end{array}\right.$$

puis

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 a_1 = \dfrac{(\cos A_2 \cos A_3 - \varepsilon' \cos A_1)^2}{\sin^2 A_2 \sin^2 A_3}, \\ \text{avec} \\ \qquad \varepsilon' = \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 \dfrac{P'_{11}P'_{22}P'_{33}}{P'_{23}P'_{31}P'_{12}} = \pm 1; \end{array}\right.$$

ensuite

$$\operatorname{sh}^2 a_1 = \frac{P_{23}^2 - P_{22}P_{33}}{P_{22}P_{33}} = -\frac{P'_{11}}{P_{22}P_{33}},$$

$$\sin^2 A_1 = \frac{P'_{22}P'_{33} - P'^2_{23}}{P'_{22}P'_{33}} = \Delta^2 \frac{P_{11}}{P'_{22}P'_{33}};$$

par conséquent

$$\frac{\sin^2 A_1}{\operatorname{sh}^2 a_1} = \frac{\sin^2 A_2}{\operatorname{sh}^2 a^2} = \frac{\sin^2 A_3}{\operatorname{sh}^2 a_3}.$$

Ceci posé, nous dirons que a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3 sont les *côtés* et les *angles* de l'un des triangles $A_1A_2A_3$, si ces six quantités vérifient les neuf relations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2 a_1 = \frac{P_{23}^2}{P_{22}P_{33}}, \qquad \operatorname{ch}^2 a_2 = \frac{P_{31}^2}{P_{33}P_{11}}, \qquad \operatorname{ch}^2 a_3 = \frac{P_{12}^2}{P_{11}P_{22}},\\
&\qquad \operatorname{ch} a_1 \operatorname{ch} a_2 \operatorname{ch} a_3 = +\frac{P_{23}P_{31}P_{12}}{P_{11}P_{22}P_{33}},\\
&\cos A_1 \operatorname{sh} a_2 \operatorname{sh} a_3 = \operatorname{ch} a_2 \operatorname{ch} a_3 - \operatorname{ch} a_1,\\
&\cos A_2 \operatorname{sh} a_3 \operatorname{sh} a_1 = \operatorname{ch} a_3 \operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} a_2,\\
&\cos A_3 \operatorname{sh} a_1 \operatorname{sh} a_2 = \operatorname{ch} a_1 \operatorname{ch} a_2 - \operatorname{ch} a_3,\\
&\qquad \frac{\sin A_1}{\operatorname{sh} a_1} = \frac{\sin A_2}{\operatorname{sh} a_2} = \frac{\sin A_3}{\operatorname{sh} a_3}.
\end{aligned}\right.$$

Mais si ces neuf relations sont vérifiées, on en déduit, en comparant les sept premières à la relation (1),

$$(4)\quad \cos^2 A_1 = \frac{P'^2_{23}}{P'_{22}P'_{33}}, \qquad \cos^2 A_2 = \frac{P'^2_{31}}{P'_{33}P'_{11}}, \qquad \cos^2 A_3 = \frac{P'^2_{12}}{P'_{11}P'_{22}};$$

puis, des cinq dernières, on tire, par un calcul direct,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{ch} a_1 \sin A_2 \sin A_3 = \cos A_2 \cos A_3 + \cos A_1,\\
&\operatorname{ch} a_2 \sin A_3 \sin A_1 = \cos A_3 \cos A_1 + \cos A_2,\\
&\operatorname{ch} a_3 \sin A_1 \sin A_2 = \cos A_1 \cos A_2 + \cos A_3,\\
&\qquad \frac{\operatorname{sh} a_1}{\sin A_1} = \frac{\operatorname{sh} a_2}{\sin A_2} = \frac{\operatorname{sh} a_3}{\sin A_3};
\end{aligned}\right.$$

après quoi la formule (2) montre que

$$(6)\quad \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 = -\frac{P'_{23}P'_{31}P'_{12}}{P'_{11}P'_{22}P'_{33}}.$$

On a ainsi neuf relations nouvelles (4), (5), (6) : en y faisant

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1 = \pi i - A'_1 i, & A_1 = \pi - \dfrac{a'_1}{i}, \\ a_2 = \pi i - A'_2 i, & A_2 = \pi - \dfrac{a'_2}{i}, \\ a_3 = \pi i - A'_3 i, & A_3 = \pi - \dfrac{a'_3}{i}, \end{cases}$$

on a neuf relations de la forme (3) entre les six nouvelles quantités $a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3$; donc ces six quantités sont les côtés et les angles d'*un* triangle $A'_1 A'_2 A'_3$, qui est dit *le triangle polaire* du triangle $A_1 A_2 A_3$ dont les éléments sont $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$.

Or, en négligeant les multiples de 2π et de $2\pi i$, les formules (3) définissent 64 systèmes de valeurs pour $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$, à chacun desquels correspond, en vertu des formules (7), un système de valeurs pour $a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3$.

Il y a donc 64 *couples de triangles polaires.*

Points opposés.

28. Pour que a_1, a_2, a_3 soient les côtés d'*un* triangle $A_1 A_2 A_3$, il faut et il suffit qu'on puisse trouver pour chacun des radicaux $\sqrt{P_{ii}}$ une valeur déterminée, telle qu'on ait à la fois

$$\operatorname{ch} a_1 = \frac{P_{23}}{\sqrt{P_{22}}\sqrt{P_{33}}}, \qquad \operatorname{ch} a_2 = \frac{P_{31}}{\sqrt{P_{33}}\sqrt{P_{11}}}, \qquad \operatorname{ch} a_3 = \frac{P_{12}}{\sqrt{P_{11}}\sqrt{P_{22}}}.$$

Dans cet ordre d'idées, il convient de définir un point quelconque par des coordonnées normales X, Y, Z liées par la relation

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1,$$

et de regarder les deux points X, Y, Z et $-X, -Y, -Z$ comme distincts : on peut, si l'on veut, considérer ces deux points, que nous appellerons *points opposés*, comme situés, l'un sur le *recto*, l'autre sur le *verso* du plan.

En regardant toujours les nombres X′, Y′, Z′ définis par les formules

$$\begin{aligned} X' &= aX + bY - cZ, \\ Y' &= a'X + b'Y - c'Z, \\ Z' &= -a''X - b''Y + c''Z, \end{aligned}$$

comme les coordonnées normales dans le système $x'O'y'$ du point qui a pour coordonnées X, Y, Z dans le système xOy, on voit que deux points qui sont opposés dans le système xOy le sont aussi dans le système $x'O'y'$.

Les formules précédentes montrent que la valeur de

$$-X_1X_2 - Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

ne change pas quand on passe d'un système de coordonnées à un autre; donc on peut définir $\mathrm{ch}\,A_1A_2$ par la formule

$$\mathrm{ch}\,A_1A_2 = -X_1X_2 - Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Au point de vue actuel, toute droite $UX + VY - WZ = 0$ a deux pôles opposés Ui, Vi, Wi et $-Ui$, $-Vi$, $-Wi$.

En appelant P celui des pôles de Oy qui a pour coordonnées i, 0, 0, et Q celui des pôles de Ox qui a pour coordonnées 0, i, 0, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,PA_1 &= -iX_1, \\ \mathrm{ch}\,QA_1 &= -iY_1. \end{aligned}$$

De même, en prenant 0, 0, 1 pour coordonnées du point O,

$$\mathrm{ch}\,OA_1 = Z_1;$$

par conséquent, la formule qui définit $\mathrm{ch}\,AA_1$ peut s'écrire

$$\mathrm{ch}\,A_1A_2 = \mathrm{ch}\,PA_1\,\mathrm{ch}\,PA_2 + \mathrm{ch}\,QA_1\,\mathrm{ch}\,QA_2 + \mathrm{ch}\,OA_1\,\mathrm{ch}\,OA_2.$$

Ensuite, soit P′ celui des pôles de $O'y'$ qui a pour coordonnées i, 0, 0 dans le système $x'O'y'$, Q′ celui des pôles de $O'x'$ qui a pour coordonnées 0, i, 0, et soient 0, 0, 1 les coordonnées de l'origine O′. Les coordonnées des trois points P′, Q′, O′ dans le système xOy sont

$$ai,\quad bi,\quad ci;\qquad a'i,\quad b'i,\quad c'i;\qquad a'',\quad b'',\quad c'';$$

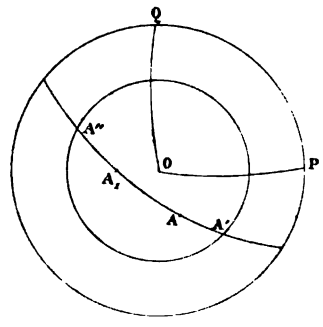
de sorte que, en désignant par A un point quelconque, les formules de transformation prennent la forme

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} P'A &= \operatorname{ch} PP' \operatorname{ch} PA + \operatorname{ch} QP' \operatorname{ch} QA + \operatorname{ch} OP' \operatorname{ch} OA,\\
\operatorname{ch} Q'A &= \operatorname{ch} PQ' \operatorname{ch} PA + \operatorname{ch} QQ' \operatorname{ch} QA + \operatorname{ch} OQ' \operatorname{ch} OA,\\
\operatorname{ch} O'A &= \operatorname{ch} PO' \operatorname{ch} PA + \operatorname{ch} QO' \operatorname{ch} QA + \operatorname{ch} OO' \operatorname{ch} OA;
\end{aligned}$$

ces formules subsistent d'ailleurs quel que soit le triangle P'Q'O' pourvu que le triangle PQO soit trirectangle.

On pourrait prendre chP'A, chQ'A, chO'A pour coordonnées du point A relativement au triangle P'Q'O'; mais il est inutile de multiplier les systèmes de coordonnées. Nous remarquerons seulement qu'on a une image très nette de la manière dont nous envisageons actuellement la Géométrie non euclidienne, en considérant sur une sphère un triangle trirectangle OPQ, et un petit cercle ayant pour centre le point O

Fig. 23.



et pour rayon sphérique la huitième partie d'une circonférence de grand cercle. Nous ferons jouer à ce petit cercle le rôle du cercle limite en définissant la distance AA_1 (*fig.* 23) de deux points de la sphère comme le demi-logarithme du rapport anharmonique formé par ces deux points A et A_1 avec les points A' et A'' où le grand cercle AA_1 rencontre le petit cercle O :

$$AA_1 = \frac{1}{2} \log \frac{\sin \widehat{AA'}}{\sin \widehat{AA''}} : \frac{\sin \widehat{A_1A'}}{\sin \widehat{A_1A''}};$$

ensuite, en prenant pour coordonnées du point A les trois quantités

$$X = i \operatorname{ch} PA, \qquad Y = i \operatorname{ch} QA, \qquad Z = \operatorname{ch} OA,$$

on retrouve sans peine toutes les formules précédentes, et l'on voit que, pour distinguer deux points *diamétralement opposés*, on est obligé de leur attribuer des coordonnées égales et de signes contraires.

Revenons à la formule

$$\operatorname{ch} A_1 A_2 = Z_1 Z_2 - Y_1 Y_2 - X_1 X_2,$$

qui définit la distance $A_1 A_2$ de deux points du plan.

Si l'on se donne pour cette distance une valeur déterminée α satisfaisant à la relation précédente, les points A', A'' où la droite $A_1 A_2$ rencontre le cercle limite sont déterminés par l'égalité

$$e^{2\alpha} = (A_1 A_2 A' A'').$$

On trouve que les coordonnées du point A' sont

$$X_1 - e^{\alpha} X_2, \quad Y_1 - e^{\alpha} Y_2, \quad Z_1 - e^{\alpha} Z_2,$$

et celles du point A''

$$X_1 - e^{-\alpha} X_2, \quad Y_1 - e^{-\alpha} Y_2, \quad Z_1 - e^{-\alpha} Z_2.$$

Par conséquent, la distance de deux autres points A_3 et A_4 situés sur la droite $A_1 A_2$ est déterminée à $2n\pi i$ près par les deux formules

$$\operatorname{ch} A_3 A_4 = Z_3 Z_4 - Y_3 Y_4 - X_3 X_4,$$
$$A_3 A_4 = \tfrac{1}{2} \log (A_3 A_4 A' A'').$$

Il en résulte que, si l'on considère sur la droite $A_1 A_2$ un point A tel que

$$A_1 A = \rho, \qquad A A_2 = \alpha - \rho,$$

les coordonnées X, Y, Z de ce point sont définies par les égalités

$$(1) \qquad \begin{cases} X \operatorname{sh} \alpha = X_1 \operatorname{sh}(\alpha - \rho) + X_2 \operatorname{sh} \rho, \\ Y \operatorname{sh} \alpha = Y_1 \operatorname{sh}(\alpha - \rho) + Y_2 \operatorname{sh} \rho, \\ Z \operatorname{sh} \alpha = Z_1 \operatorname{sh}(\alpha - \rho) + Z_2 \operatorname{sh} \rho. \end{cases}$$

En particulier, les coordonnées normales du milieu de $A_1 A_2$ sont

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}, \qquad Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}, \qquad Z = \frac{Z_1 + Z_2}{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}.$$

Inversement, si l'on donne les coordonnées normales d'un point A de la droite A_1A_2 sous la forme

$$\begin{aligned} X &= \lambda X_1 + \mu X_2, \\ Y &= \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ Z &= \lambda Z_1 + \mu Z_2, \end{aligned}$$

la distance $A_1A = \rho$ est déterminée à $2n\pi i$ près par les égalités

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sh}\alpha &= \operatorname{sh}(\alpha - \rho), \\ \mu \operatorname{sh}\alpha &= \operatorname{sh}\rho, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\operatorname{sh} A_1A}{\operatorname{sh} AA_2}.$$

Dans le cas où les points A_1, A_2 sont conjugués, en faisant

$$\alpha = A_1A_2 = +\frac{\pi i}{2},$$

on trouve que les coordonnées du point A situé sur A_1A_2 et tel que $A_1A = \rho$ sont

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= X_1 \operatorname{ch}\rho - i \operatorname{sh}\rho X_2, \\ Y &= Y_1 \operatorname{ch}\rho - i \operatorname{sh}\rho Y_2, \\ Z &= Z_1 \operatorname{ch}\rho - i \operatorname{sh}\rho Z_2. \end{aligned} \right.$$

Transversales.

29. Soient A_1, A_2, A_3 les trois sommets d'un triangle définis par leurs coordonnées normales X_i, Y_i, Z_i, et $ux + vy - wz = 0$ l'équation d'une droite D. Cette droite rencontre le côté A_2A_3 en deux points opposés : soit B_1 l'un de ces deux points; on a, en vertu des formules du numéro précédent,

$$\frac{\operatorname{sh} B_1A_2}{\operatorname{sh} B_1A_3} = \frac{D_2}{D_3},$$

en posant

$$D_i = uX_i + vY_i - wZ_i.$$

De même, soient B_2 l'un des points d'intersection de la droite D avec A_3A_1, et B_3 l'un des points d'intersection de cette même droite avec

A_1A_2, on a

$$\frac{\operatorname{sh} B_2A_3}{\operatorname{sh} B_2A_1} = \frac{D_3}{D_1},$$
$$\frac{\operatorname{sh} B_3A_1}{\operatorname{sh} B_3A_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{sh} B_1A_2}{\operatorname{sh} B_1A_3}\,\frac{\operatorname{sh} B_2A_3}{\operatorname{sh} B_2A_1}\,\frac{\operatorname{sh} B_3A_1}{\operatorname{sh} B_3A_2} = +1.$$

C'est le théorème de Ménélaüs. Il est bon de remarquer que ce théorème n'a de sens qu'autant qu'on regarde deux points opposés comme distincts; car, autrement, chaque distance telle que B_1A_2 ne serait déterminée qu'à $n\pi i$ près et, par conséquent, chacun des trois rapports serait susceptible de deux valeurs égales et de signes contraires.

Soit A_0 un quatrième point, X_0, Y_0, Z_0 ses coordonnées; désignons par C_1 l'un des deux points d'intersection de A_0A_1 avec le côté A_2A_3, et posons

$$(ijk) = \begin{vmatrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_j & Y_j & Z_j \\ X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix};$$

nous aurons, comme plus haut,

$$\frac{\operatorname{sh} C_1A_2}{\operatorname{sh} C_1A_3} = \frac{(0\,1\,2)}{(0\,1\,3)}.$$

De même, en appelant C_2 l'un des points d'intersection de A_0A_2 avec A_3A_1 et C_3 l'un des points d'intersection de A_0A_3 avec A_1A_2, on a

$$\frac{\operatorname{sh} C_2A_3}{\operatorname{sh} C_2A_1} = \frac{(0\,2\,3)}{(0\,2\,1)},$$
$$\frac{\operatorname{sh} C_3A_1}{\operatorname{sh} C_3A_2} = \frac{(0\,3\,1)}{(0\,3\,2)};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{sh} C_1A_2}{\operatorname{sh} C_1A_3}\,\frac{\operatorname{sh} C_2A_3}{\operatorname{sh} C_2A_1}\,\frac{\operatorname{sh} C_3A_1}{\operatorname{sh} C_3A_2} = -1.$$

Ce dernier théorème montre que les trois médianes d'un triangle concourent en un même point.

Cercles, horicycles et hypercycles.

30. J'appelle *cycle* le lieu des points équidistants d'un point fixe appelé *centre* et, par conséquent, aussi équidistants de la polaire du centre, que j'appellerai l'*axe* du cycle.

Je réserve le nom de *cercle* pour les cycles qui ont pour centre un point *réel;* quant aux cycles qui ont pour centre un point *idéal* et, par conséquent, pour axe une droite *réelle,* je les désigne sous le nom d'*hypercycles*.

Un hypercycle se compose évidemment de deux branches situées de part et d'autre de l'axe.

En désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre et par R le rayon, l'équation du cycle est, en coordonnées homogènes,

$$(1) \qquad (zz_0 - yy_0 - xx_0)^2 = \mathrm{ch}^2 \mathrm{R}(z_0^2 - y_0^2 - x_0^2)(z^2 - y^2 - x^2).$$

Cette équation, qu'on peut mettre sous la forme plus simple et tout aussi générale

$$(2) \qquad (zz_0 - yy_0 - xx_0)^2 = z^2 - y^2 - x^2,$$

montre qu'un cycle n'est autre chose qu'une courbe du second degré *bitangente* au cercle limite $z^2 - y^2 - x^2 = 0$; la corde des contacts est l'axe du cycle et son pôle est le centre (Klein).

Dans le cas particulier où x_0, y_0, z_0 sont des nombres *réels* satisfaisant à la relation

$$z_0^2 - y_0^2 - x_0^2 = 0,$$

l'équation (2) représente une courbe *réelle,* puisque $z^2 - y^2 - x^2 > 0$, à laquelle Lobatschewsky a donné le nom d'*horicycle*, et que l'on peut regarder comme un cycle de rayon infini, puisque la distance du point x_0, y_0, z_0 à tout point du plan est alors infinie. Pour trouver une propriété géométrique de cette courbe que l'on puisse prendre pour définition, il convient de remplacer les coordonnées homogènes x, y, z

par des coordonnées normales X, Y, Z liées par la relation

$$Z^2 - Y^2 - X^2 = 1;$$

l'équation (2) devient alors

$$Zz_0 - Yy_0 - Xx_0 = 1.$$

Considérons deux points quelconques de la courbe A_1 et A_2 définis par leurs coordonnées X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 :

$$Z_1 z_0 - Y_1 y_0 - X_1 x_0 = 1,$$
$$Z_2 z_0 - Y_2 y_0 - X_2 x_0 = 1,$$

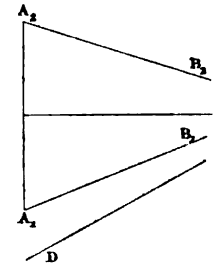
et formons l'équation

$$ZZ_1 - YY_1 - XX_1 = ZZ_2 - YY_2 - XX_2$$

de la perpendiculaire au milieu de A_1A_2 : on voit que cette perpendiculaire passe par le point *limite* x_0, y_0, z_0, c'est-à-dire qu'elle est *parallèle* à n'importe quelle droite passant par ce même point x_0, y_0, z_0.

Ainsi on peut définir un horicycle comme *le lieu des symétriques d'un point fixe* A_1 *par rapport à toutes les droites parallèles à une droite fixe* D (*fig.* 24).

Fig. 24.



En partant de cette définition, on pourra construire autant de points de l'horicycle qu'on voudra, puisqu'on sait mener une infinité de parallèles à la droite D (26).

Il résulte encore de cette définition que, si l'on considère deux points quelconques de l'horicycle A_1 et A_2, les *rayons* A_1B_1, A_2B_2, c'est-à-dire les parallèles à la droite D menées par les deux points A_1 et A_2, sont également inclinés sur la corde A_1A_2 : c'est cette propriété que Lobatschewsky et Bolyai prennent pour définition de l'horicycle.

Deux horicycles sont superposables, car ils coïncident aussitôt qu'ils ont un point et un rayon commun.

Axes radicaux.

31. J'appelle *axes radicaux* de deux cycles

$$(zz_0 - yy_0 - xx_0)^2 = z^2 - y^2 - x^2,$$
$$(zz_1 - yy_1 - xx_1)^2 = z^2 - y^2 - x^2$$

les deux cordes communes

$$zz_0 - yy_0 - xx_0 = \pm (zz_1 - yy_1 - xx_1)$$

qui passent par le point de concours des axes

$$zz_0 - yy_0 - xx_0 = 0,$$
$$zz_1 - yy_1 - xx_1 = 0$$

des deux cycles, et forment avec ces deux axes un faisceau harmonique.

Les six axes radicaux de trois cycles pris deux à deux forment quatre systèmes de trois droites concourantes, savoir :

$$D_0 = \pm D_1,$$
$$D_0 = \pm D_2,$$
$$\pm D_1 = \pm D_2,$$

en représentant par $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ les axes des trois cycles.

Pour distinguer géométriquement ces quatre systèmes, il convient de considérer le lieu représenté par l'équation

$$(zz_0 - yy_0 - xx_0)^2 = z^2 - y^2 - x^2$$

comme se composant de deux cycles *opposés*

$$C_0 \equiv Zz_0 - Yy_0 - Xx_0 - 1 = 0,$$
$$C'_0 \equiv Zz_0 - Yy_0 - Xx_0 + 1 = 0,$$

que nous regarderons comme *distincts, quoique coïncidents.*

Si le centre x_0, y_0, z_0 est *réel,* nous considérerons les deux *cercles* C_0 et C'_0 comme tracés l'un sur le *recto,* l'autre sur le *verso* du plan.

Nous ferons la même convention si le centre est *sur le cercle limite*, c'est-à-dire si C_0 et C'_0 sont des horicycles.

Mais si le centre est un point *idéal*, l'équation

$$Zz_0 - Yy_0 - Xx_0 = +1$$

exige que les deux branches de l'hypercycle C_0 soient situées, l'une A, sur le *recto* et l'autre, B, sur le *verso* du plan; de même, l'hypercycle C'_0 a une branche A′ tracée sur le *verso* et coïncidant avec A, et l'autre branche B′ tracée sur le *recto* et coïncidant avec B.

A ce point de vue, deux cycles $C_0 = 0$, $C_1 = 0$ ne se rencontrent plus qu'en deux points et n'ont plus qu'un seul axe radical

$$C_0 - C_1 = 0;$$

de sorte qu'on peut dire sans ambiguïté que les axes radicaux de trois cycles considérés deux à deux concourent en un même point.

Remarque. — On peut considérer une droite comme un cycle ayant pour centre le pôle de cette droite et pour rayon $\frac{\pi i}{2}$.

L'axe radical d'une droite et d'un cycle quelconque est cette droite elle-même.

L'axe radical de deux droites est indéterminé.

Puissance d'un point par rapport à un cycle.

32. Soit

$$C_0 \equiv Zz_0 - Yy_0 - Xx_0 - 1 = 0$$

l'équation d'un cycle et X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées normales d'un point A_1. Menons par ce point une droite quelconque qui coupe le cycle en deux points A′ et A″; soit A_2 l'un des deux points *opposés* où cette même droite rencontre la polaire du point A_1 par rapport au cercle de l'infini. Nous savons (28) que, en faisant $A_1A_2 = +\frac{\pi i}{2}$, les distances

$$\rho' = A_1A', \qquad \rho'' = A_1A''$$

sont déterminées à $2n\pi i$ près, et qu'en désignant par X_2, Y_2, Z_2 les

coordonnées normales du point A_2, celles du point A' sont

$$X = X_1 \operatorname{ch}\rho' - i \operatorname{sh}\rho' X_2,$$
$$Y = Y_1 \operatorname{ch}\rho' - i \operatorname{sh}\rho' Y_2,$$
$$Z = Z_1 \operatorname{ch}\rho' - i \operatorname{sh}\rho' Z_2.$$

En écrivant que ces coordonnées vérifient l'équation du cycle et en posant

$$P_{i0} = Z_i z_0 - Y_i y_0 - X_i x_0,$$

on trouve

$$P_{10} \operatorname{ch}\rho' - i \operatorname{sh}\rho' P_{20} = 1.$$

De même

$$P_{10} \operatorname{ch}\rho'' - i \operatorname{sh}\rho'' P_{20} = 1;$$

d'où, en éliminant P_{20},

$$P_{10} \operatorname{sh}(\rho' - \rho'') = \operatorname{sh}\rho' - \operatorname{sh}\rho''$$

ou

$$\operatorname{th}\frac{\rho'}{2} \operatorname{th}\frac{\rho''}{2} = \frac{P_{10} - 1}{P_{10} + 1}.$$

Par conséquent, le produit $\operatorname{th}\frac{\rho'}{2} \operatorname{th}\frac{\rho''}{2}$ reste constant quand la sécante tourne autour du point A_1 : c'est ce produit constant que nous appellerons *la puissance du point* A_1.

Ainsi la puissance d'un point X, Y, Z par rapport à un cycle $C_0 = 0$, c'est

$$\frac{C_0}{C_0 + 2}.$$

Il en résulte que le lieu des points d'égales puissances, par rapport à deux cycles $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, est l'axe radical

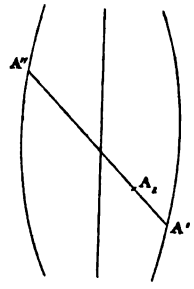
$$C_0 - C_1 = 0$$

de ces deux cycles. Par conséquent, les propriétés des cercles orthogonaux subsistent en Géométrie non euclidienne.

Il importe de remarquer que la généralité de nos formules suppose que, dans le cas d'un hypercycle, on regarde les deux branches comme tracées l'une sur le *recto*, l'autre sur le *verso* du plan; c'est-à-dire que, si la sécante issue du point A_1 rencontre l'une des branches en un point A' (*fig.* 25) et l'autre branche en un point A'', les distances

$\rho' = A_1 A'$ et $\rho'' = A_1 A''$ sont l'une réelle, l'autre égale à une quantité

Fig. 25.



réelle augmentée de πi. Si l'on ne voulait pas faire cette convention, on aurait tantôt

$$\frac{C_0}{C_0 + 2} = \operatorname{th}\frac{\rho'}{2}\operatorname{th}\frac{\rho''}{2},$$

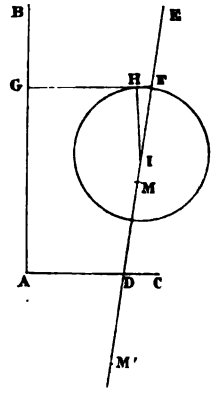
tantôt

$$\frac{C_0}{C_0 + 2} = \frac{\operatorname{th}\frac{\rho'}{2}}{\operatorname{th}\frac{\rho''}{2}},$$

selon que les points A', A'' seraient ou non sur la même branche.

Comme application, considérons un hypercycle défini par son axe AB

Fig. 26.



(*fig.* 26) et par l'un de ses points C; abaissons CA perpendiculaire sur AB, et proposons-nous de déterminer les points d'intersection M

et M′ de l'hypercycle avec une droite DE perpendiculaire à AC au point D. Nous savons qu'on peut trouver sur DE un point F tel que la perpendiculaire FG, abaissée de ce point sur AB, soit plus grande que AC; prenons sur GF une longueur GH = AC; le point H appartiendra à l'hypercycle, et la tangente en ce point, qui est perpendiculaire à GH, rencontre la droite DE en un point I, car nous supposons

$$GH = AC > AD.$$

Le cercle décrit de I comme centre avec IH pour rayon coupe orthogonalement l'hypercycle, ainsi que tous les cycles passant par M et M′, et, en particulier, le cercle décrit sur MM′ comme diamètre; donc le rayon DM de ce dernier cercle est égal à la tangente menée du point D au cercle I, ce qui permet de le déterminer.

Problèmes sur la ligne droite.

33. *Construire une droite passant par deux points donnés réels, idéaux ou à l'infini.*

Dire qu'une droite passe par un point idéal donné, c'est dire qu'elle est perpendiculaire à une droite donnée; et dire qu'une droite passe par un point donné à l'infini, c'est dire qu'elle est *parallèle* à une droite donnée (26).

Donc, en écartant le cas où les deux points donnés sont réels et le cas où ils sont l'un réel, l'autre idéal, ce qui revient à mener par un point une perpendiculaire à une droite, nous avons à résoudre les quatre problèmes suivants :

1° *Mener par un point une parallèle à une droite donnée.*

2° *Mener une perpendiculaire commune à deux droites données.*

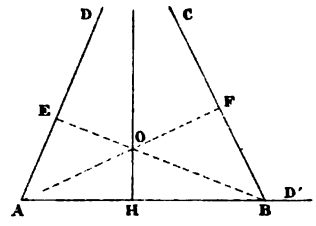
Ces deux problèmes ont été traités au n° 26.

3° *Mener une droite parallèle à une droite* D *et perpendiculaire à une droite* D′ (*fig.* 27).

Bolyai donne une solution de ce problème; mais on arrive à une construction plus simple que la sienne en s'appuyant sur ce que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point.

En effet, supposons d'abord que les droites D et D′ se coupent en un point A, et soit DAD′ l'angle *aigu* formé par ces deux droites. Nous savons qu'on peut trouver sur AD′ un point B assez éloigné du point A pour que la perpendiculaire menée par ce point à la droite D′ ne rencontre pas la droite D; donc, en menant BC parallèle à AD, l'angle ABC

Fig. 27.



sera aigu, lui aussi. Dans ces conditions, les perpendiculaires AF et BE abaissées des points A et B sur BC et AD respectivement se coupent en un point O et, dans le triangle OAB, la hauteur OH issue du point O est la droite demandée, car elle passe par le point de concours des deux autres hauteurs AD et BC, c'est-à-dire qu'elle leur est parallèle.

Si maintenant les deux droites données D et D′ ne se rencontrent pas, il n'y a qu'à mener par un point de D′ une parallèle à D pour être ramené au cas précédent.

4° *Mener une parallèle à deux droites données* D *et* D′.

Il faut distinguer trois cas selon que les droites D et D′ se rencontrent, admettent une perpendiculaire commune, ou sont parallèles.

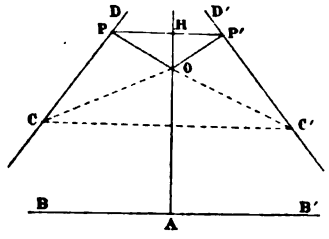
Si D et D′ se rencontrent, en menant la bissectrice de l'un des angles qu'elles forment, la droite menée perpendiculairement à cette bissectrice et parallèlement à D sera aussi parallèle à D′ par raison de symétrie. Il y a donc quatre solutions.

Si les droites D et D′ admettent une perpendiculaire commune AA′, en remplaçant, dans la construction précédente, la bissectrice par la perpendiculaire au milieu de AA′, on a deux solutions. Il y en a deux autres, car les parallèles à D, menées par le milieu de AA′, sont aussi parallèles à D′.

Enfin, si les droites D et D′ sont parallèles (*fig.* 28), soit C un point

de l'une et C′ un point de l'autre; nous savons que toute droite issue du point C et située dans l'angle DCC′ coupe la droite D′; donc la bissectrice de l'angle DCC′ rencontre la bissectrice de l'angle D′C′C en un point O. Les distances OP, OP′ de ce point aux deux droites D et

Fig. 28.



D′ étant égales, ces deux droites sont symétriques par rapport à la hauteur OH du triangle isoscèle OPP′; par conséquent, la droite BAB′, menée perpendiculairement à OH et parallèlement à D, sera aussi parallèle à D′.

Remarque. — Quelle que soit la position des deux droites D et D′, on voit qu'il est toujours possible de construire une droite équidistante de D et de D′.

Quadrilatère trirectangle et triangle rectangle.

34. Les éléments d'un quadrilatère ABCD (*fig.* 29) qui a trois angles droits B, C, D sont liés par les relations

$$\frac{\operatorname{sh} AD}{\operatorname{sh} BC} = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = \operatorname{ch} AB = \frac{1}{\sin\Delta},$$

α, γ étant les angles aigus du triangle rectangle ABC, et Δ l'angle de parallélisme correspondant à la distance AB

$$\Delta = \Pi(AB).$$

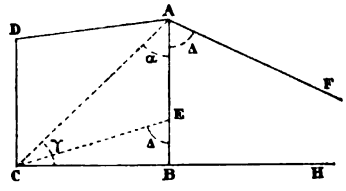
Nous avons vu (26) que, étant donné AB, en décrivant de C comme centre, avec AD pour rayon, un arc de cercle qui coupe AB en E, on a

$$\Delta = \widehat{BEC}.$$

Réciproquement, Δ étant donné, on pourra faire un angle BAF égal à Δ, et l'on obtiendra la distance AB en menant BH perpendiculaire à AB et parallèle à AF. Donc :

1° Si l'on donne BC et Δ, on peut construire AB et par suite AD; en prenant sur BA un point E tel que CE = AD, on aura $\widehat{BEC} = \Delta$; donc on aura construit un triangle rectangle BEC, *connaissant un côté de l'angle droit* BC *et l'angle* Δ *opposé à ce côté.*

Fig. 29.



2° Si l'on donne AD et BC, on peut construire le triangle BEC, ce qui donne Δ, et par suite AB; donc on peut construire le quadrilatère trirectangle ABCD, *connaissant deux côtés opposés* AD *et* BC.

3° Si l'on donne α et γ, en faisant deux angles égaux à α et à $\frac{\pi}{2} - \gamma$, qui aient le sommet et un côté communs, et en abaissant d'un point du côté commun des perpendiculaires sur les deux autres côtés, les longueurs a et c de ces perpendiculaires satisfont à la relation

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} = \sin \Delta.$$

En construisant un triangle rectangle qui ait c pour hypoténuse et a pour côté de l'angle droit, l'angle opposé à a sera égal à Δ; donc on pourra déterminer AB, et l'on aura construit un triangle rectangle ABC, *connaissant les deux angles aigus* α *et* γ.

Intersection d'une droite et d'un hypercycle.

35. Nous supposons l'hypercycle défini par son axe xy et par la distance δ de l'un de ses points à l'axe.

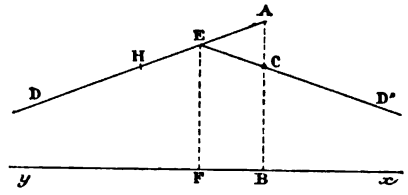
Si la droite donnée D rencontre l'axe xy en un point réel, on a à

construire un triangle rectangle, connaissant un côté de l'angle droit, δ, et l'angle opposé, savoir l'angle de D avec xy.

Si la droite D rencontre l'axe xy en un point idéal, on a à construire un quadrilatère trirectangle, connaissant deux côtés opposés, savoir δ et la perpendiculaire commune aux deux droites D et xy. D'ailleurs, nous avons traité ce cas directement au n° 32.

Enfin, supposons que la droite D soit parallèle à l'axe xy (*fig.* 30); d'un point A de cette droite abaissons AB perpendiculaire sur xy, et

Fig. 30.



prenons sur BA une longueur BC $= \delta$; si nous menons CD′ parallèle à *yx du côté opposé à* AD, cette droite CD′ rencontre nécessairement AD en un point E. Comme la figure est symétrique par rapport à la perpendiculaire EF abaissée du point E sur xy, en prenant sur ED une longueur EH = EC, on aura le point H où la droite AD rencontre l'hypercycle.

Intersection d'un horicycle et d'une droite.

36. Nous supposons l'horicycle défini par un de ses points A et par le *rayon* AB qui passe par ce point.

1° Si la droite donnée D est elle-même un rayon, c'est-à-dire si elle est parallèle à AB, le point où elle rencontre l'horicycle est symétrique de A par rapport à la droite *équidistante* des deux droites D et AB (*Remarque* du n° 33).

On trouve dans Bolyai une autre solution, qui est compliquée et exige des constructions dans l'espace.

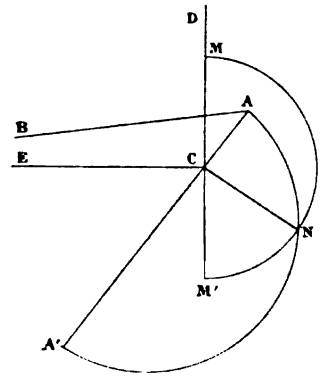
2° Si la droite D passe par le point A, elle rencontre l'horicycle en un second point qui est symétrique de A par rapport au rayon perpendiculaire à D.

3° Enfin, si la droite D est quelconque, les deux points M et M′

(*fig.* 31) où elle coupe l'horicycle sont symétriques par rapport au point C où elle est rencontrée par le rayon CE qui lui est perpendiculaire.

Menons la droite AC qui rencontre l'horicycle en un second point

Fig. 31.



A′ que nous savons déterminer (2°), et décrivons un demi-cercle sur AA′ comme diamètre; le point C ayant même puissance par rapport à ce cercle et par rapport à l'horicycle, en menant par le point C une perpendiculaire à AA′ qui rencontre le cercle en N, nous aurons $CN = CM = CM'$.

Intersection de deux cycles.

37. Quelle que soit la nature des deux cycles, il est facile de reconnaître si leurs points d'intersection sont réels ou imaginaires en construisant les points où ils sont rencontrés par la droite qui joint leurs centres; ensuite, on détermine leur axe radical par la méthode ordinaire, en les coupant par un cercle auxiliaire que l'on fera passer par un point de chacun d'eux.

Considérons en particulier deux hypercycles

$$ZZ_0 - YY_0 - XX_0 = \operatorname{sh}\delta,$$
$$ZZ_1 - YY_1 - XX_1 = \operatorname{sh}\delta_1,$$

δ et δ_1 étant les distances des deux hypercycles à leurs axes respectifs.

L'axe radical a pour équation

$$\frac{ZZ_0 - YY_0 - XX_0}{ZZ_1 - YY_1 - XX_1} = \frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}\delta_1};$$

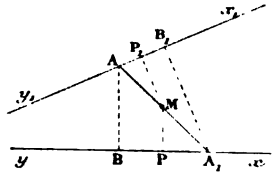
c'est le lieu des points tels que *le rapport des sinus hyperboliques de leurs distances aux* axes *des deux cycles soit égal à* $\frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}\delta_1}$.

Cette propriété, qui est évidente géométriquement quand les deux hypercycles se coupent, fournit une construction de l'axe radical plus simple que la construction générale indiquée plus haut.

Distinguons trois cas.

1° *Les axes* xy, x_1y_1 *sont parallèles* (*fig.* 32). — Construisons le point A où le premier hypercycle coupe x_1y_1, et le point A_1 où le

Fig. 32.



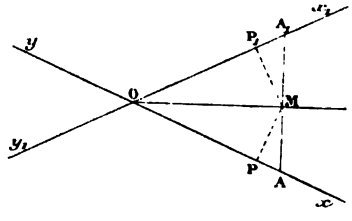
second hypercycle coupe xy. Considérons le milieu M de AA_1 et menons MP et AB perpendiculaires sur xy, puis MP_1 et A_1B_1 perpendiculaires sur x_1y_1; comme

$$\frac{\operatorname{sh}MP}{\operatorname{sh}MP_1} = \frac{\operatorname{sh}AB}{\operatorname{sh}A_1B_1} = \frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}\delta_1},$$

l'axe radical demandé est la parallèle à xy menée par le point M.

2° *Les axes* xy, x_1y_1 *se coupent en un point* O (*fig.* 33). — On pour-

Fig. 33.



rait faire la même construction que dans le cas précédent; mais il

est plus simple de prendre sur Ox et sur Ox_1 des longueurs

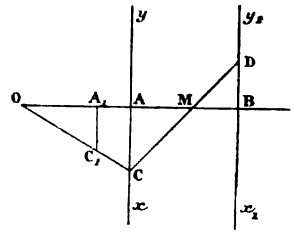
$$OA = \delta_1, \qquad OA_1 = \delta,$$

et alors l'axe radical demandé est la médiane OM du triangle OAA_1; car, en abaissant MP et MP_1 perpendiculaires sur les axes, on a

$$\frac{\operatorname{sh} MP}{\operatorname{sh} MP_1} = \frac{\operatorname{sh} OA_1}{\operatorname{sh} OA} = \frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}\delta_1}.$$

3° *Les axes xy, x_1y_1 ont une perpendiculaire commune* AB (*fig.* 34). — Je prends sur Ax un point quelconque C et, sur le prolongement

Fig. 34.



de BA, une longueur $OA = \delta$, puis $OA_1 = \delta_1$, et, par le point A_1, je mène une perpendiculaire à OA qui rencontre OC en un point C_1, en sorte que

$$\frac{\operatorname{th} AC}{\operatorname{th} A_1C_1} = \frac{\operatorname{sh} OA}{\operatorname{sh} OA_1} = \frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}\delta_1}.$$

Donc, en prenant sur By_1 une longueur $BD = A_1C_1$, et en menant CD qui rencontre AB en un point M, on a

$$\frac{\operatorname{sh} AM}{\operatorname{sh} BM} = \frac{\operatorname{th} AC}{\operatorname{th} BD} = \frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}\delta_1}:$$

l'axe radical demandé est la perpendiculaire à AB au point M.

Tangente à un cycle.

38. La corde des contacts des tangentes issues d'un point donné est la polaire de ce point par rapport au cycle : on la construit par la méthode ordinaire, et, en cherchant les points où elle rencontre le cycle, on a les points de contact.

On peut aussi trouver pour chaque cas une méthode particulière. Par exemple, si l'on veut mener une tangente à un *cercle* perpendiculaire à une droite donnée, on aura à construire un quadrilatère trirectangle dans lequel on connaît deux côtés, le rayon du cercle et la distance du centre à la droite donnée.

Dans le cas où le point donné est *réel* ou *à l'infini*, on obtient la tangente demandée en menant une tangente quelconque, que l'on fait tourner autour du centre du cycle jusqu'à la faire passer par le point donné. La construction réussit pour un horicycle ou un hypercycle aussi bien que pour un cercle proprement dit.

Quatrième proportionnelle.

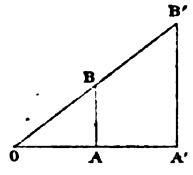
39. *Étant données trois longueurs a, b, c, on peut toujours construire une longueur x telle que*

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}{\operatorname{sh} a}.$$

En effet, si l'une des longueurs b ou c est moindre que a, par exemple $b < a$, on pourra construire un triangle ayant pour côtés a et c, et dans lequel la hauteur opposée au côté c est égale à b; et alors la hauteur opposée au côté a sera la longueur cherchée x.

Si les deux longueurs b, c sont plus grandes que a, on peut faire un triangle rectangle OAB (*fig.* 35) ayant pour hypoténuse $OB = b$ et

Fig. 35.



pour côté de l'angle droit $AB = a$, en abaissant, d'un point B' pris sur le prolongement de l'hypoténuse, B'A' perpendiculaire sur OA; on a

$$\frac{\operatorname{sh} OB'}{\operatorname{sh} A'B'} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a},$$

d'où

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh} c \operatorname{sh} OB'}{\operatorname{sh} A'B'};$$

et, comme on peut prendre OB′ assez grand pour que A′B′ soit supérieur à c, on sera ramené au cas précédent.

On peut employer la même méthode pour construire un triangle rectangle OAB, connaissant l'angle O et le côté opposé AB, problème déjà traité au n° 34. En effet, puisqu'on donne l'angle O, on peut trouver deux longueurs OB′ et A′B′ *plus grandes que la longueur donnée* AB, et telles que

$$\frac{\operatorname{sh} A'B'}{\operatorname{sh} OB'} = \sin O,$$

et, par conséquent, construire l'hypoténuse OB du triangle demandé en vertu de la relation

$$\operatorname{sh} OB = \frac{\operatorname{sh} OB' \operatorname{sh} AB}{\operatorname{sh} A'B'}.$$

Construction des formules

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} a \pm \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{m}{n} \operatorname{sh} a,$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

40. Remarquons d'abord que, sur un horicycle défini par un de ses points, le point O (*fig.* 36), et par le rayon OB qui passe par ce point, on peut trouver un point A tel que OA soit égal à une longueur donnée a; pour cela, il suffit de faire un angle BOA égal à l'angle de parallélisme correspondant à la distance $\frac{a}{2}$.

De même, on peut trouver sur l'horicycle un point A dont la distance au rayon OB soit égale à une longueur donnée a; car, si par le point O on mène une droite OQ de longueur égale à a et faisant avec le rayon OB un angle égal à l'angle de parallélisme correspondant à la distance a, la perpendiculaire à la droite OQ au point Q rencontrera l'horicycle au point cherché A.

Prenons pour origine le point O, et pour axe des y le rayon OB; l'équation de l'horicycle est

$$Z - Y - 1 = 0$$

avec

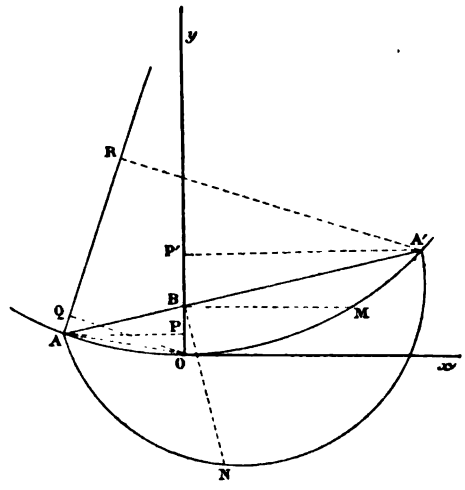
$$Z^2 - Y^2 - X^2 = 1;$$

d'où

$$X^2 = 2Y,$$

équation qui rappelle celle de la parabole en Géométrie euclidienne.

Fig. 36.



Ainsi les coordonnées d'un point A de l'horicycle ont pour valeurs

$$Z = \operatorname{ch} OA,$$

$$Y = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{OA}{2},$$

$$X = \pm 2 \operatorname{sh} \frac{OA}{2};$$

par conséquent, la distance de deux points quelconques A, A′ de l'horicycle est donnée par la formule

$$\operatorname{ch} AA' = ZZ' - YY' - XX' = \operatorname{ch} OA \operatorname{ch} OA' - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{OA}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{OA'}{2} \mp 4 \operatorname{sh} \frac{OA}{2} \operatorname{sh} \frac{OA'}{2},$$

d'où

$$\operatorname{sh} \frac{AA'}{2} = \operatorname{sh} \frac{OA'}{2} - \operatorname{sh} \frac{OA}{2},$$

si les points A et A′ sont du même côté de Oy; et

$$\operatorname{sh}\frac{AA'}{2} = \operatorname{sh}\frac{OA}{2} + \operatorname{sh}\frac{OA'}{2},$$

si les points A et A′ sont de part et d'autre de Oy.

Or on peut déterminer les points A et A′ de façon que $\frac{OA}{2}$ et $\frac{OA'}{2}$ soient égales à des longueurs données a et a'; donc on peut construire une longueur x telle que

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} a \pm \operatorname{sh} a'.$$

Ensuite, si l'on considère sur l'horicycle, à partir du point O, une série de points équidistants O, A_1, A_2, ..., on a

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{OA_m}{2}}{\operatorname{sh}\frac{OA_n}{2}} = \frac{m}{n}.$$

Il en résulte que, étant donnée une longueur a, on peut construire une longueur x telle que

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} a} = \frac{m}{n}.$$

En particulier, on peut partager un arc d'horicycle OA en n parties égales; il suffit pour cela de construire une longueur OA_1 telle que

$$\operatorname{sh}\frac{OA_1}{2} = \frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{OA}{2}.$$

D'ailleurs, il est aisé d'évaluer la longueur de l'arc d'horicycle OA. En effet, soit l_n la longueur d'une ligne brisée $OA_1A_2\ldots A_{n-1}A$ inscrite dans cet arc, la différence

$$l_n - \left(2\operatorname{sh}\frac{OA_1}{2} + 2\operatorname{sh}\frac{A_1A_2}{2} + \ldots + 2\operatorname{sh}\frac{A_{n-1}A}{2}\right)$$

tend vers zéro si le nombre des côtés de la ligne brisée augmente indéfiniment en même temps que chacun des côtés tend vers zéro.

Mais

$$\operatorname{sh}\frac{OA_1}{2}+\operatorname{sh}\frac{A_1A_2}{2}+\ldots+\operatorname{sh}\frac{A_{n-1}A}{2}=\operatorname{sh}\frac{OA}{2};$$

donc

$$\lim_{n=\infty} l_n = 2\operatorname{sh}\frac{OA}{2}.$$

C'est cette limite qui est, par définition, la mesure de la longueur de l'arc OA. Ainsi

$$\operatorname{arc} OA = 2\operatorname{sh}\frac{OA}{2}.$$

Considérons maintenant un point fixe B situé sur Oy et défini par ses coordonnées o, Y_1, Z_1. L'équation d'une droite passant par ce point est de la forme

$$\lambda X + Z_1 Y - Y_1 Z = 0;$$

et, en formant l'équation aux X des points d'intersection A et A′ de cette droite avec l'horicycle, on trouve

$$2\lambda X + Z_1 X^2 - Y_1(X^2+2) = 0.$$

Le produit des racines de cette équation reste constant quand la sécante tourne autour du point B. Ainsi

$$\operatorname{sh} AP \operatorname{sh} A'P' = \text{const.},$$

ou

$$\operatorname{sh}\frac{OA}{2}\operatorname{sh}\frac{OA'}{2} = \text{const.}$$

Par conséquent, étant données deux longueurs a et a', on peut construire une longueur x telle que

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} a'.$$

Car, sur l'horicycle déterminé par le point O et le rayon Oy, on peut trouver deux points A et A′ situés de part et d'autre de Oy et à des distances de Oy respectivement égales à a et à a'

$$AP = a, \qquad A'P' = a'.$$

Menons AA′ qui rencontre Oy en un point B, et, par ce point B, me-

nons une perpendiculaire à Oy qui rencontre l'horicycle en un point M : nous aurons

$$\operatorname{sh}^2 BM = \operatorname{sh} AP \operatorname{sh} A'P',$$

d'où $BM = x$.

D'ailleurs on peut se dispenser de construire le point M en remarquant que le point B a même puissance par rapport à tous les cycles passant par A et A'; donc, en décrivant un demi-cercle sur AA' comme diamètre et en menant par le point B une perpendiculaire à AA' qui rencontre ce demi-cercle en un point N, on a

$$BN = BM = x.$$

On aurait pu déterminer les points A et A' de façon que

$$\frac{OA}{2} = a, \qquad \frac{OA'}{2} = a',$$

et alors on aurait eu $x = \frac{OM}{2}$.

Expression générale des longueurs que l'on peut construire avec la règle et le compas.

41. Désignons par F une fonction *algébrique qui ne contienne pas d'autres symboles irrationnels que des radicaux d'indice égal à* 2.

Il résulte du numéro précédent que, étant donnés des longueurs a_1, a_2, a_3, ... et des nombres entiers n_1, n_2, n_3, ..., on peut construire une longueur x telle que

$$\operatorname{sh} x = F(\operatorname{sh} a_1, \operatorname{sh} a_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots),$$

pourvu que la fonction F soit *homogène et du premier degré* par rapport aux quantités $\operatorname{sh} a_1$, $\operatorname{sh} a_2$, ...

Il est aisé d'en conclure qu'on ne peut construire une longueur x telle que

$$(1) \qquad e^x = F(e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, n_1, n_1, \ldots).$$

En effet, cette égalité peut s'écrire

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{F}\right).$$

Or, si l'on remplace e^{a_i} par

$$\frac{\operatorname{sh} 2a_i}{2\operatorname{sh} a_i} + \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 2a_i}{4\operatorname{sh}^2 a_i} - 1},$$

$\frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{F}\right)$ devient une fonction *homogène et du degré* o des quantités $\operatorname{sh} 2a_i$ et $\operatorname{sh} a_i$; donc, en se donnant une longueur arbitraire b, on peut construire une longueur y telle que

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} b} = \frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{F}\right);$$

ensuite, en supposant $y > b$, on construira un angle Δ tel que

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} b} = \frac{1}{\sin \Delta};$$

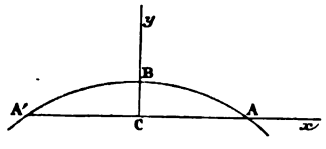
et alors on sera ramené à construire une longueur x telle que

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin \Delta},$$

ce que l'on sait faire (26).

On abrège notablement les constructions en s'appuyant sur la relation qui existe entre la *corde* AA′ et la *flèche* BC d'un arc d'horicycle

Fig. 37.



(*fig.* 37). Pour établir cette relation, prenons la corde AA′ pour axe des x et la flèche BC pour axe des y; l'équation de l'horicycle est

$$Z + Y - \operatorname{ch} CA = 0.$$

En écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées du point B, on a

$$\operatorname{ch} CB + \operatorname{sh} CB - \operatorname{ch} CA = 0$$

ou

$$e^{CB} = \operatorname{ch} CA. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit d'ailleurs que, étant donnée l'une des longueurs CA ou CB, on peut construire l'autre.

Ceci posé, si l'on veut construire x de façon que

$$e^x = F(e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, n_1, n_2, \ldots),$$

on commencera par déterminer des longueurs b_i telles que

$$e^{a_i} = \operatorname{ch} b_i = \frac{\operatorname{sh} 2 b_i}{2 \operatorname{sh} b_i},$$

de sorte que, la fonction F *devenant homogène et de degré* o par rapport aux quantités $\operatorname{sh} 2 b_i$ et $\operatorname{sh} b_i$, en se donnant une longueur arbitraire k, on pourra construire une longueur y telle que

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} k} = F;$$

après quoi on construit, comme plus haut, une longueur z telle que

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} k},$$

et enfin x de façon que

$$e^x = \operatorname{ch} z.$$

Pour se convaincre que la formule (1) donne bien l'expression générale des longueurs que l'on peut construire avec la règle et le compas, il suffit de remarquer que l'équation d'un cercle est de la forme

$$(zz_1 - yy_1 - xx_1)^2 = \operatorname{ch}^2 r_1 (z_1^2 - y_1^2 - x_1^2)(z^2 - y^2 - x^2)$$

et que l'équation d'une droite passant par deux points est de la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc on considère une série de points déterminés par l'intersection d'une série de droites et de cercles, le premier cercle ayant pour centre un point arbitraire de la première droite, tous les autres cercles ayant pour centre un des points déjà obtenus, et toutes les autres droites passant par deux des points déjà obtenus, il est clair que, en dé-

signant par r_1, r_2, ... les rayons des cercles successifs, la distance δ de deux points quelconques de la série sera donnée par une équation de la forme

$$\operatorname{ch}\delta = F(e^{r_1}, e^{r_2}, \ldots),$$

F représentant une fonction *algébrique qui ne contient pas d'autres symboles irrationnels que des radicaux d'indice égal à* 2.

Comme cas particulier, il peut arriver qu'un certain nombre des rayons r_i aient une valeur arbitraire qui n'influe pas sur la distance δ des deux points que l'on considère et que tous les autres rayons soient égaux à la distance de deux points déjà obtenus : dans ce cas, on a

$$e^{\delta} = F(n_1, n_2, n_3, \ldots),$$

F désignant toujours une fonction de même forme que précédemment, et n_1, n_2, ... représentant des *nombres entiers* déterminés. Il en résulte que e^{δ} est racine d'une certaine équation *à coefficients entiers*.

Or M. Hermite a démontré que le nombre e n'est racine d'aucune équation à coefficients entiers : donc il est impossible de construire une longueur δ qui, dans le système adopté, ait pour mesure le nombre 1, c'est-à-dire que la longueur K que Bolyai appelle l'*unité naturelle de longueur* (10) ne peut pas se construire avec la règle et le compas.

Si, parmi les quantités données, figurent des angles ω_i, on construira des longueurs b_i, c_i telles que

$$\frac{\operatorname{sh} b_i}{\operatorname{sh} c_i} = \sin\omega_i;$$

par conséquent, l'expression générale des longueurs que l'on peut construire avec la règle et le compas est alors donnée par la formule

$$e^{x} = F(e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{\omega_1 i}, e^{\omega_2 i}, \ldots).$$

De même, pour l'expression générale des angles que l'on peut construire avec la règle et le compas, on a

$$e^{xi} = F(e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{\omega_1 i}, e^{\omega_2 i}, \ldots).$$

Constructions particulières.

42. *Étant données deux longueurs a et b, construire deux longueurs x et y telles que*

$$(1)\qquad \begin{cases} \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \operatorname{sh} a, \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{sh}^2 b. \end{cases}$$

Soient OA et OA′ deux cordes d'un horicycle H (*fig.* 36) ayant pour longueurs respectives $2x$ et $2y$; nous savons que

$$\operatorname{sh} \frac{AA'}{2} = \operatorname{sh} \frac{OA}{2} + \operatorname{sh} \frac{OA'}{2};$$

donc la corde AA′ sera égale à $2a$, et, par suite, cette corde sera tangente à un horicycle H′ concentrique à H et facile à déterminer. Ensuite, par le point B où AA′ rencontre le rayon Oy, menons une perpendiculaire à Oy qui rencontre l'horicycle H en un point M : nous aurons

$$\operatorname{sh}^2 \frac{OM}{2} = \operatorname{sh} \frac{OA}{2} \operatorname{sh} \frac{OA'}{2};$$

donc $OM = 2b$. On pourra donc déterminer le point M et, par suite, le point B; en menant par le point B une tangente à l'horicycle H′, et en cherchant les points A et A′ où cette tangente rencontre l'horicycle H, on obtiendra les longueurs demandées $OA = 2x$, $OA' = 2y$.

On traite de même le système

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = \operatorname{sh} a, \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{sh}^2 b; \end{cases}$$

mais on peut trouver, pour chacun de ces deux systèmes, d'autres constructions plus simples que la précédente.

D'abord pour le système (1). Considérons x et y comme les distances de deux points A, A′ de l'horicycle H (*fig.* 36) au rayon Oy

$$x = AP, \qquad y = A'P'.$$

En abaissant A′R perpendiculaire sur le rayon qui passe par le point A, on a

$$\operatorname{sh} A'R = \operatorname{sh} AP + \operatorname{sh} A'P';$$

donc $A'R = a$, ce qui permet de placer la corde AA' dans l'horicycle. Ensuite, en appelant toujours B le point de rencontre de AA' avec Oy et N le point du demi-cercle décrit sur AA' comme diamètre qui se projette en B sur AA', nous avons vu au n° 40 que

$$\operatorname{sh}^2 BN = \operatorname{sh} AP \operatorname{sh} A'P';$$

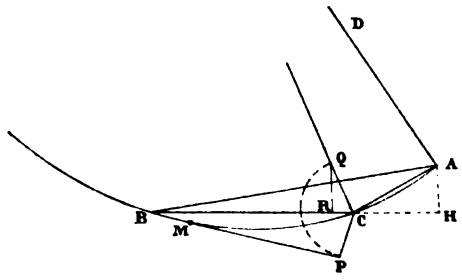
donc $BN = b$, ce qui permet de construire le point N et, par suite, le point B; il ne reste plus qu'à abaisser AP et $A'P'$ perpendiculaires sur le rayon qui passe par le point B.

Passons au système (2), et considérons $2x$ et $2y$ comme les longueurs de deux cordes AB et AC d'un horicycle situées du même côté du rayon AD qui passe par le point A (*fig.* 38). On a d'abord

$$\operatorname{sh}\frac{BC}{2} = \operatorname{sh}\frac{AB}{2} - \operatorname{sh}\frac{AC}{2};$$

d'où $BC = 2a$, ce qui permet de placer la corde BC dans l'horicycle.

Fig. 38.



Ensuite, en abaissant AH perpendiculaire sur BC, on a

$$\operatorname{sh} AH = \frac{\operatorname{sh} AB \operatorname{sh} AC \sin BAC}{\operatorname{sh} BC};$$

d'où, en remplaçant BAC par DAC — DAB et en remarquant (26) que

$$\sin DAC = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{AC}{2}}, \qquad \sin DAB = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{AB}{2}},$$

$$\cos DAC = \operatorname{th}\frac{AC}{2}, \qquad \cos DAB = \operatorname{th}\frac{AB}{2},$$

on déduit

$$\operatorname{sh} AH = \frac{4 \operatorname{sh}\frac{AB}{2} \operatorname{sh}\frac{AC}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{AB}{2} - \operatorname{sh}\frac{AC}{2}\right)}{\operatorname{sh} BC} = \frac{2 \operatorname{sh}\frac{AB}{2} \operatorname{sh}\frac{AC}{2}}{\operatorname{ch}\frac{BC}{2}},$$

expression remarquable de la hauteur d'un triangle inscrit dans un horicycle. Ensuite, si nous construisons une corde CM de l'horicycle égale à $2b$, en abaissant CP perpendiculaire sur la tangente en M, nous aurons de même

$$\operatorname{sh} CP = 2 \operatorname{sh}^2 b,$$

d'où

$$\operatorname{sh} AH = \frac{\operatorname{sh} CP}{\operatorname{ch}\frac{BC}{2}} = \operatorname{sh} CP \sin \Delta,$$

Δ étant l'angle de parallélisme correspondant à la distance $\frac{BC}{2}$; donc, en prenant sur le rayon qui passe par le point C une longueur $CQ = CP$ et en abaissant QR perpendiculaire sur BC, on aura enfin

$$QR = AH,$$

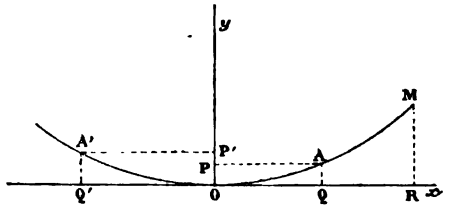
ce qui permettra de construire le point A.

43. *Construire une longueur* x *telle que*

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{sh}^2 a + \operatorname{sh}^2 a'.$$

Soient OA et OA′ (*fig.* 39) deux cordes d'un horicycle ayant pour lon-

Fig. 39.



gueurs respectives $2a$ et $2a'$, et considérons la longueur inconnue $2x$ comme une corde OM du même horicycle, de sorte que

$$\operatorname{sh}^2 \frac{OM}{2} = \operatorname{sh}^2 \frac{OA}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{OA'}{2};$$

d'où, en abaissant AQ, A'Q', MR perpendiculaires sur la tangente en O,

$$\operatorname{sh} MR = \operatorname{sh} AQ + \operatorname{sh} A'Q'.$$

Connaissant AQ et A'Q', on pourra construire une longueur MR satisfaisant à cette relation et, par suite, déterminer le point M.

On peut aussi remarquer que, en abaissant AP et A'P' perpendiculaires sur le rayon Oy, on a

$$\operatorname{sh} AP = 2 \operatorname{sh} \frac{OA}{2} = 2 \operatorname{sh} a,$$

$$\operatorname{sh} A'P' = 2 \operatorname{sh} \frac{OA'}{2} = 2 \operatorname{sh} a'.$$

D'autre part,

$$e^{OP} = \operatorname{ch} AP,$$
$$e^{OP'} = \operatorname{ch} A'P',$$

d'où

$$\operatorname{ch} PP' = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{ch} AP}{\operatorname{ch} A'P'} + \frac{\operatorname{ch} A'P'}{\operatorname{ch} AP}\right)$$

ou

$$2 \operatorname{ch} PP' \operatorname{ch} AP \operatorname{ch} A'P' = \operatorname{sh}^2 AP + \operatorname{sh}^2 A'P' + 2;$$

donc, en appelant β l'hypoténuse du triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit AP et PA', on a

$$2 \operatorname{ch} \beta = 4 \operatorname{sh}^2 a + 4 \operatorname{sh}^2 a' + 2,$$

d'où

$$\frac{\beta}{2} = x.$$

Cela revient à dire que, si l'on fait tourner le demi-horicycle OA' autour de Oy jusqu'à ce qu'il vienne se placer dans un plan perpendiculaire au plan yOA, les trois arcs d'horicycles OA, OA', AA' seront liés par la relation

$$(\operatorname{arc} AA')^2 = (\operatorname{arc} OA)^2 + (\operatorname{arc} OA')^2.$$

On sait d'ailleurs, depuis Lobatschewsky, qu'on peut faire toutes les constructions de la Géométrie euclidienne sur la surface, appelée *horisphère*, qui est engendrée par un horicycle tournant autour d'un de ses rayons. Si nous avons évité la considération de cette surface, c'est pour montrer que la Géométrie plane se suffit à elle-même.

Polygones réguliers.

44. Le côté a d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon r satisfait à la relation

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2} = \operatorname{sh} r \sin\frac{\pi}{n}.$$

Donc on peut construire a toutes les fois que la valeur de $\sin\frac{\pi}{n}$ peut s'obtenir en résolvant une ou plusieurs équations du second degré à *coefficients entiers*, c'est-à-dire pour

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ \ldots.$$

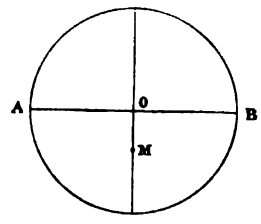
Ainsi on peut construire en Géométrie non euclidienne les mêmes polygones réguliers qu'en Géométrie euclidienne.

Par exemple, pour $n = 6$,

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sh} r.$$

Or, si par les extrémités d'un diamètre AB (*fig.* 40) du cercle con-

Fig. 40.



sidéré on fait passer un horicycle qui rencontre en M le diamètre perpendiculaire à AB, on a

$$\operatorname{sh}\frac{AM}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{AB}{2};$$

donc AM est le côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre AB.

Cette construction est due à Bolyai, qui y est arrivé par la considération de l'horisphère.

Déplacement d'une figure dans le plan.

45. Nous avons admis au n° 38 que tout déplacement d'une figure dans le plan équivaut à une *rotation* autour d'un point fixe *réel, idéal* ou *à l'infini*.

Pour établir cette proposition, désignons par X, Y, Z les coordonnées normales d'un point M *réel* ou *idéal* relativement à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Supposons que, après le déplacement, le point M soit venu en M′ et que le système xOy soit venu en $x'O'y'$; les coordonnées du point M′ dans le système $x'O'y'$ sont toujours X, Y, Z; donc les coordonnées de ce point dans le système xOy sont

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = aX + a'Y + a''Z, \\ Y' = bX + b'Y + b''Z, \\ Z' = cX + c'Y + c''Z, \end{cases}$$

les neuf coefficients a, b, c, ... étant liés par les relations (2) du n° 18.

Pour que le point M soit resté fixe, il faut que

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z,$$

c'est-à-dire que le point M doit appartenir aux trois droites

$$(2)\qquad \begin{cases} (a-1)X + a'Y + a''Z = 0, \\ bX + (b'-1)Y + b''Z = 0, \\ cX + c'Y + (c''-1)Z = 0. \end{cases}$$

Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} a-1 & a' & a'' \\ b & b'-1 & b'' \\ c & c' & c''-1 \end{vmatrix}$$

est nul en vertu des relations

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = +1,$$

$$b'c'' - c'b'' = a, \qquad c''a - a''c = b', \qquad ab' - ba' = c'';$$

donc les trois droites (2) concourent en un même point.

Soit I ce point : trois cas peuvent se présenter.

1° *Le point* I *est réel.* — En prenant ce point pour origine des coordonnées, les formules (1) se présentent sous la forme

$$\begin{aligned} X' &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ Y' &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \\ Z' &= Z; \end{aligned}$$

donc tous les points du plan tournent autour du point I d'un angle α.

2° *Le point* I *est idéal.* — Alors sa polaire P est réelle. En prenant cette polaire pour axe des x, les formules (1) prennent la forme

$$\begin{aligned} X' &= X\,\mathrm{ch}\,\delta + Z\,\mathrm{sh}\,\delta, \\ Y' &= Y, \\ Z' &= X\,\mathrm{sh}\,\delta + Z\,\mathrm{ch}\,\delta; \end{aligned}$$

donc tous les points du plan décrivent des hypercycles ayant pour axe la droite P, et leurs projections sur cette droite parcourent des chemins égaux à δ.

Remarque. — Que le point I soit réel ou idéal, sa polaire rencontre le cercle de l'infini en deux points I′ et I″ qui restent immobiles : ainsi il y a dans le plan *trois* points fixes I, I′, I″ (Klein). Si le calcul précédent ne nous en a donné qu'un, cela tient à ce que les points I′ et I″ n'ont pas de coordonnées *normales*. Mais rien n'empêche de convenir que, dans les formules (1), X, Y, Z et X′, Y′, Z′ désignent les coordonnées *homogènes* des deux points M et M′; alors, pour que ces deux points coïncident, il suffit que

$$X' = \lambda X, \qquad Y' = \lambda Y, \qquad Z' = \lambda Z;$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a' & a'' \\ b & b'-\lambda & b'' \\ c & c' & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$1 - \lambda^3 + (a + b' + c'')\lambda(\lambda - 1) = 0.$$

En prenant la racine $\lambda = 1$, on retrouve le point I; les deux autres racines donnent les points I′ et I″.

3° *Le point* I *est à l'infini.* — En faisant passer l'axe des y par ce point, les formules (1) deviennent

$$\begin{aligned} X' &= X - bY + bZ, \\ Y' &= bX + (1 - \tfrac{1}{2}b^2)Y + \tfrac{1}{2}b^2 Z, \\ Z' &= bX - \tfrac{1}{2}b^2 Y + (1 + \tfrac{1}{2}b^2)Z. \end{aligned}$$

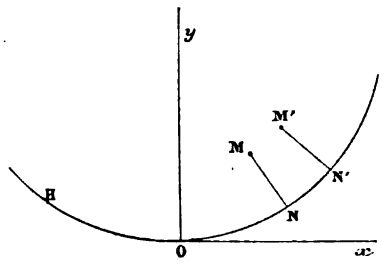
On en déduit d'abord

$$Z' - Y' = Z - Y,$$

ce qui montre que les points M et M′ dont les coordonnées sont X, Y, Z et X′, Y′, Z′ se trouvent sur un même horicycle ayant pour centre le point I.

Ensuite considérons l'horicycle H qui a pour centre le point I et qui passe par l'origine; et projetons les points M et M′ sur cet horicycle en N et en N′ (*fig.* 41), c'est-à-dire menons par les points M et

Fig. 41.



M′ des parallèles à Oy qui rencontrent l'horicycle H en N et en N′. Désignons par ξ et par ξ' les arcs d'horicycle ON, O′N′ considérés comme positifs à droite de Oy et comme négatifs à gauche

$$\xi = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{ON}{2},$$

$$\xi' = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{ON'}{2},$$

et par η, η' les distances MN, M′N′ considérées comme positives du côté de Oy et comme négatives du côté opposé.

Les quantités ξ, η, qu'on peut appeler les coordonnées *horicycliques* du point M, définissent la position de ce point par rapport à l'horicycle H.

Or nous savons (40) que les coordonnées normales du point N ont pour valeurs

$$X_1 = 2 \operatorname{sh} \frac{ON}{2} = \xi,$$

$$Y_1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{ON}{2} = \tfrac{1}{2}\xi^2,$$

$$Z_1 = \operatorname{ch} ON \quad = 1 + \tfrac{1}{2}\xi^2;$$

on en déduit sans peine que celles du point M sont données par les formules

$$\begin{aligned} X &= X_1 e^{-\eta} &&= \xi e^{-\eta}, \\ Y &= Y_1 e^{-\eta} + \operatorname{sh}\eta &&= \tfrac{1}{2}\xi^2 e^{-\eta} + \operatorname{sh}\eta, \\ Z &= Z_1 e^{-\eta} + \operatorname{sh}\eta &&= (1 + \tfrac{1}{2}\xi^2) e^{-\eta} + \operatorname{sh}\eta, \end{aligned}$$

et celles du point M′ par des formules analogues.

En substituant dans les relations

$$\begin{aligned} Z' - Y' &= Z - Y, \\ X' - X &= b(Z - Y), \end{aligned}$$

on trouve d'abord

$$e^{-\eta'} = e^{-\eta},$$

d'où $\eta' = \eta$, ce qui montre à nouveau que les points M et M′ sont sur un même horicycle concentrique à H; ensuite

$$\xi' - \xi = b;$$

donc l'arc d'horicycle $NN' = \xi' - \xi$ est constant et égal à b.

Ainsi, tous les points du plan *restent à une distance constante de l'horicycle* H, *et leurs projections sur cet horicycle parcourent des chemins égaux à b.*

On pourrait d'ailleurs démontrer tout ce qui précède par des raisonnements géométriques analogues à ceux qu'on fait en Géométrie euclidienne.

Les coordonnées horicycliques que nous avons définies plus haut ont été introduites par Beltrami et par M. Flye Sainte-Marie.

Les formules précédentes montrent que, dans ce système de coordonnées, l'équation d'une droite est de la forme

$$e^{2\eta} = -\xi^2 + b\xi + c.$$

CHAPITRE III.

MESURE DES AIRES.

---

46. On appelle *polygone* une portion de plan limitée par une ligne brisée fermée dont les côtés ne s'entrecoupent pas :

1° On dit que deux polygones sont *équivalents* quand ils sont ou superposables ou composés d'un même nombre de polygones superposables chacun à chacun.

Il en résulte que deux polygones formés d'un même nombre de polygones *équivalents* chacun à chacun sont eux-mêmes équivalents.

De plus, il est facile de montrer que *deux polygones* A *et* B *équivalents à un troisième polygone* C *sont équivalents*. En effet, par hypothèse, on peut décomposer C en parties α_i avec lesquelles on peut former A, et en parties β_i avec lesquelles on peut former B. Mais, si l'on trace à la fois dans le polygone C les lignes qui limitent les α_i et celles qui limitent les β_i, le polygone C se trouvera décomposé en parties γ_i avec lesquelles on pourra former soit A, soit B. Donc A et B sont équivalents.

Cette démonstration est d'ailleurs connue depuis longtemps, bien qu'elle soit assez peu répandue.

2° On dit qu'un polygone A est la *somme* de plusieurs polygones B, C, D quand il est formé de polygones partiels respectivement équivalents à B, C, D.

3° On dit qu'un polygone A est *plus grand* qu'un polygone B, ou que B est *plus petit* que A, quand on peut trouver un troisième polygone C tel que A soit la somme de B et de C.

47. Comme on peut décomposer un polygone en plusieurs autres d'une infinité de manières, il y a lieu de démontrer que *chacune des*

trois relations

$$A = B, \quad A > B, \quad A < B$$

exclut les deux autres.

Pour peu qu'on réfléchisse à cette proposition, on reconnaîtra qu'elle n'est rien moins qu'évidente. Pour la démontrer, M. Flye Sainte-Marie propose de décomposer le plan en zones identiques par une suite illimitée d'horicycles concentriques et équidistants, puis de partager toutes ces zones en cases identiques par des normales communes limitées à deux horicycles successifs; après quoi, en désignant par n le nombre des cases situées à l'intérieur d'une surface A, et par n' le nombre des cases situées à l'intérieur d'une autre surface B, on démontrerait :

1° Que, si A et B sont équivalentes, c'est-à-dire formées de parties superposables, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une longueur d telle que, si les dimensions des cases sont inférieures à d, on ait

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n'} < 1 + \varepsilon,$$

quelle que soit la position des surfaces A et B dans le plan;

2° Que, si $A > B$, on peut trouver un nombre positif ε' et une longueur d' tels que, si les dimensions des cases sont moindres que d', on ait

$$\frac{n}{n'} > 1 + \varepsilon'.$$

Il en résulte évidemment que les hypothèses $A = B$, $A > B$ sont incompatibles.

Mais, en se bornant, comme nous le faisons, à la considération des *polygones*, l'incompatibilité des hypothèses $A = B$ et $A > B$ résulte immédiatement de la comparaison des *déficits* de A et de B.

En effet, nous avons appelé *déficit* d'un polygone de n côtés (4) ce qui manque à la somme de ses angles pour faire $(n - 2)\pi$, en supposant, bien entendu, que, s'il y a des angles *rentrants*, on attribue à chacun d'eux une valeur comprise entre π et 2π. Or on voit aisément que, si à un polygone P on ajoute un triangle T, de quelque manière que se fasse la juxtaposition, le déficit du polygone ainsi formé est la

somme des déficits de P et de T; on en déduit que, si un polygone est la somme de plusieurs autres, son déficit est la somme des déficits des polygones partiels. Donc :

1° Si les polygones A, B sont équivalents, c'est-à-dire formés des mêmes polygones partiels, leurs déficits sont égaux.

2° Si $A > B$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un troisième polygone C tel que $A = B + C$, le déficit de A est plus grand que celui de B.

Comme le déficit de A ne peut pas être en même temps égal et supérieur à celui de B (2), il faut en conclure que les relations $A = B$, $A > B$ s'excluent mutuellement.

Le raisonnement qu'on vient de faire s'applique à la Géométrie sphérique, en remplaçant la considération du déficit par la considération de l'*excès sphérique*.

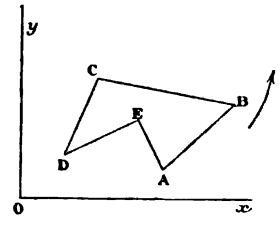
Nous allons montrer que, en Géométrie euclidienne, on peut trouver quelque chose d'analogue.

Traçons dans le plan deux axes rectangulaires Ox, Oy et désignons par

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n$$

les sommets d'un polygone, tels qu'ils se présentent en parcourant le périmètre du polygone dans le *sens dit positif*, c'est-à-dire, en supposant les axes disposés comme l'indique la figure (*fig.* 42), dans un sens tel qu'on ait constamment à sa gauche l'intérieur du polygone.

Fig. 42.



Désignons par x_i, y_i les coordonnées de A_i et considérons l'expression

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de voir, en considérant les formules de transformation

$$x = x_0 + x',$$
$$y = y_0 + y'$$

et

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

que la valeur de cette expression ne change pas quand les axes se déplacent dans le plan.

De plus, si l'on retourne le système xOy, en changeant le sens de l'axe des y sans toucher à l'axe des x, les y des divers sommets changent de signe; mais en même temps il faut renverser le numérotage des sommets : A_2 devient A_n, A_3 devient A_{n-1}, ...; par conséquent, S reprend la même valeur.

Ainsi la valeur de S est indépendante du choix des axes, ou, ce qui revient au même, indépendante de la position du polygone dans le plan.

Or la S d'un triangle $A_1A_2A_3$ est positive, car, en prenant A_1 pour origine et A_1A_2 pour axe des x, on a

$$S = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 0 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 > 0.$$

Ensuite, s'il s'agit d'un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, en posant

$$ij = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix},$$

l'identité

$$12 + 23 + 34 + 41 = (12 + 23 + 31) + (13 + 34 + 41)$$

montre que la S du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est la somme des S des triangles $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$.

En général, si un polygone est la somme de plusieurs autres, sa S est la somme des S des polygones partiels.

En particulier, comme tout polygone peut se décomposer en triangles, la S d'un polygone est un nombre *essentiellement positif*.

Ceci posé,

1° Si deux polygones A et B sont équivalents, c'est-à-dire formés des mêmes polygones partiels, ils ont même S;

2° Si $A > B$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un troisième polygone C tel que $A = B + C$, la S de A est plus grande que celle de B.

Comme la S de A ne peut pas être à la fois égale et supérieure à celle de B, il faut en conclure que les hypothèses $A = B$, $A > B$ sont incompatibles.

On voit que la démonstration précédente repose tout entière sur la distinction des deux sens dans lesquels on peut parcourir le périmètre d'un polygone ABCDE (*fig.* 42); il importe donc de définir le sens positif d'une façon aussi précise que possible. A cet effet, imaginons qu'on déplace l'angle droit xOy dans le plan, de manière que le point O vienne en B et que Oy se place sur la bissectrice de l'angle ABC *à l'intérieur du polygone :* Ox tombera d'un côté ou de l'autre. Supposons qu'il tombe du côté de BC : c'est le sens de B vers C qui sera le sens positif sur le côté BC. Or, en déplaçant de nouveau l'angle xOy de manière que le point O vienne en C et que Oy se place sur la bissectrice de l'angle BCD et toujours à l'intérieur du polygone, on voit que Ox tombe nécessairement du côté de CD : c'est donc le sens de C vers D qu'il faudra prendre pour sens positif sur le côté CD. Et ainsi de suite.

48. Revenons à la Géométrie non euclidienne, et montrons que deux polygones quelconques sont *comparables,* c'est-à-dire qu'entre deux polygones A et B, il existe toujours l'une des trois relations

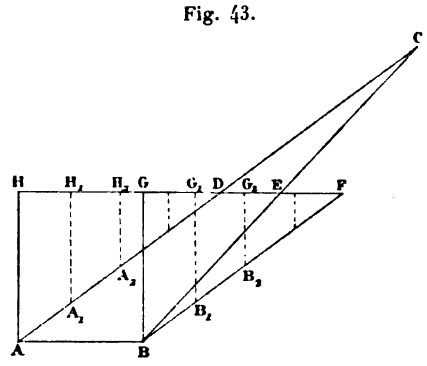
$$A = B, \qquad A > B, \qquad A < B.$$

Considérons un triangle ABC (*fig.* 43) et menons la droite DE qui joint les milieux des côtés CA et CB. Les angles CDE, CED ne sont pas tous deux obtus; supposons, par exemple, que CDE soit aigu.

En prolongeant DE d'une longueur $EF = DE$, on forme un quadrilatère ABFD évidemment équivalent au triangle ABC; ensuite, abaissons AH et BG perpendiculaires sur DE; comme l'angle CDE est aigu ainsi que l'angle F, qui lui est égal, les points H et G tombent l'un à gauche de D, l'autre à gauche de F. Les deux triangles AHD et BGF

sont égaux : Bolyai en conclut que les quadrilatères ABFD et ABGH, qui s'obtiennent en retranchant ces deux triangles de la figure totale ABFH, sont équivalents. Mais, à notre point de vue, pour établir l'équivalence de ces deux quadrilatères, il faut montrer qu'on peut les décomposer en parties superposables chacune à chacune.

Fig. 43.



Cela est évident si les deux segments égaux HD, GF n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Dans le cas contraire, partageons ces deux segments HD, GF en un même nombre n de parties égales *qui soient chacune moindres que* HG, et, par les points de division, menons

$$H_1A_1, \quad H_2A_2, \quad \ldots, \quad G_1B_1, \quad G_2B_2, \quad \ldots$$

perpendiculaires à HF, de manière à décomposer les triangles AHD, BGF en parties respectivement égales chacune à chacune.

Le quadrilatère AHH_1A_1 est contenu tout entier dans AHGB, puisque $HH_1 < HG$; donc, en transportant AHH_1A_1 en BGG_1B_1, on transforme le quadrilatère AHGB en un hexagone équivalent $AA_1H_1G_1B_1B$

$$AHGB = AA_1H_1G_1B_1B;$$

de même

$$AA_1H_1G_1B_1B = AA_2H_2G_2B_2B;$$

et ainsi de suite.

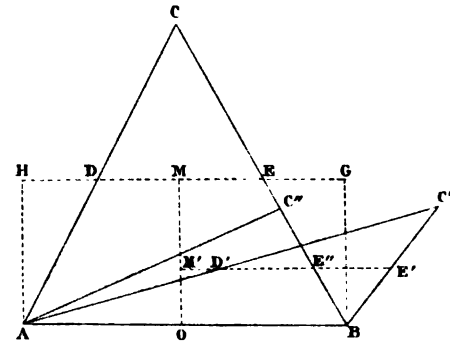
Finalement on arrive au quadrilatère ADFB. Donc

$$AHGB = ADFB = ABC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Inversement, si sur la droite HF on prend un point quelconque D′, en menant la droite AD′ et en la prolongeant d'une longueur D′C′ = AD′, on aura un triangle ABC′ équivalent à AHGB, et par conséquent (46) équivalent au triangle ABC. De plus, on peut faire en sorte que le côté AC′ du nouveau triangle soit égal à une longueur donnée l plus grande que AC : il suffit pour cela de prendre $AD' = \frac{l}{2}$.

Ainsi, étant donnés deux triangles quelconques T et T′, on pourra construire deux triangles ABC, ABC′ (*fig.* 44) *de même base* AB, res-

Fig. 44.



pectivement équivalents à T et à T′. Joignons les milieux D, E et D′, E′ des côtés CA, CB et C′A, C′B; et abaissons BG et AH perpendiculaires sur DE; le quadrilatère ABGH ainsi obtenu étant birectangle et isoscèle, la perpendiculaire à AB en son milieu O est aussi perpendiculaire à DE en un point M; et, pour la même raison, elle est aussi perpendiculaire à D′E′ en un point M′. De trois choses l'une : ou OM = OM′, et alors les triangles T et T′ sont équivalents;

Ou OM > OM′; alors D′E′ rencontre BC en un point E″, et, en prenant sur BC une longueur E″C″ = BE″, on obtient un triangle ABC″ équivalent à ABC′ et contenu tout entier dans ABC : donc

$$T = T' + ACC'' > T';$$

Ou OM′ > OM; alors on trouve un triangle T″ tel que

$$T' = T + T'',$$

d'où

$$T' > T.$$

Soient maintenant deux polygones quelconques A et B; décomposons-les en triangles a_i et b_i

$$A = a_1 + a_2 + \ldots,$$
$$B = b_1 + b_2 + \ldots.$$

Comparons les triangles a_1 et b_1 comme on vient de l'expliquer; nous trouverons, par exemple,

$$a_1 = b_1 + \alpha_1;$$

comparons ensuite α_1 et b_2; nous trouverons, par exemple,

$$b_2 = \alpha_1 + \beta_1;$$

comparons a_2 et β_1, et ainsi de suite. Finalement,

Ou les deux polygones A, B seront épuisés en même temps, et alors $A = B$,

Ou B sera épuisé avant A; alors, en appelant A′ ce qui reste de A, on a

$$A = B + A' > B;$$

Ou A sera épuisé avant B; alors, en appelant B′ ce qui reste de B, on a

$$B = A + B' > A.$$

Dans le premier cas, le déficit de A sera égal à celui de B; dans le second cas, il sera plus grand, et, dans le troisième, plus petit.

Donc, réciproquement, selon que le déficit de A sera égal, supérieur ou inférieur à celui de B, on en conclura que A est lui-même équivalent, supérieur ou inférieur à B.

Corollaires.

1° Si le déficit de A est égal à la somme des déficits de B et de C, on a $A = B + C$.

2° Si $A > B$, il y a une infinité de polygones X qui vérifient l'équation

$$B + X = A;$$

mais ils sont tous équivalents puisqu'ils ont même déficit, savoir

$$\text{déficit}\,A - \text{déficit}\,B;$$

on peut donc désigner l'un quelconque d'entre eux par le symbole $A - B$.

3° Si $A > B$, on peut trouver un entier m tel que

$$mB > A;$$

cela résulte de ce qu'on peut déterminer m de façon que

$$m\,\text{déficit}\,B > \text{déficit}\,A.$$

4° A et B étant deux polygones quelconques, à chaque entier n, on peut faire correspondre un entier m tel que

$$mB \leqq nA < (m+1)B.$$

La fraction $\frac{m}{n}$ ainsi déterminée s'appelle *la valeur approchée* à $\frac{1}{n}$ près du rapport $\frac{A}{B}$; et l'on définit le rapport $\frac{A}{B}$ lui-même, comme un nombre supérieur ou égal à tous les $\frac{m}{n}$ et inférieur aux $\frac{m+1}{n}$.

Mais, pour tous les systèmes de valeurs de m et de n satisfaisant aux relations précédentes, on a aussi

$$m\,\text{déficit}\,B \leqq n\,\text{déficit}\,A < (m+1)\,\text{déficit}\,B.$$

Il en résulte

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{déficit}\,A}{\text{déficit}\,B}.$$

Le rapport de deux polygones est égal au rapport de leurs déficits.

C'est le théorème que nous voulions établir.

On voit que, à la rigueur, il n'est pas nécessaire de savoir diviser B en n parties équivalentes. Néanmoins, pour ne rien laisser à désirer, nous allons montrer que cette division est possible toutes les fois que n est une puissance de 2.

Soit $n = 2^p$, et désignons par β le déficit de B. On peut choisir un

entier q de façon à satisfaire aux relations

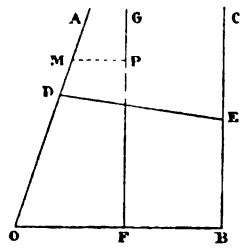
$$q \geqq p, \qquad \frac{\beta}{2^q} < \frac{\pi}{2};$$

puis faire un angle

$$\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2^q},$$

et mener une perpendiculaire BC au côté OB *qui ne rencontre pas l'autre côté* OA (*fig.* 45) : en menant la perpendiculaire commune DE aux

Fig. 45.



deux droites OA et BC, on obtient un quadrilatère trirectangle OBED, dont le déficit est égal à $\frac{\beta}{2^q}$. Par conséquent, en juxtaposant 2^{q-p} quadrilatères égaux à OBED, on forme un polygone qui, ayant pour déficit

$$2^{q-p}\frac{\beta}{2^q} = \frac{\beta}{n},$$

sera précisément la $n^{\text{ième}}$ partie de B.

49. Enfin, pour terminer, considérons l'espace compris entre deux parallèles OA, FG et la perpendiculaire OF abaissée d'un point de OA sur FG (*fig.* 45). Soit M un point mobile sur OA et MP la perpendiculaire abaissée de ce point sur FG : nous allons montrer que l'aire du quadrilatère OMPF tend vers une limite lorsque le point M s'éloigne indéfiniment.

Construisons, comme plus haut, un quadrilatère trirectangle OBED qui ait pour angle aigu l'angle AOF ; comme l'angle OMP est obtus, le quadrilatère OMPF est moindre que le quadrilatère ODEB, et la diffé-

rence entre ces deux quadrilatères est un polygone ayant pour déficit $\frac{\pi}{2} - \mathrm{AMP}$: donc pour établir que cette différence peut devenir moindre qu'un polygone donné Q, il suffit de montrer que, en désignant par ω le déficit de Q, on peut déterminer le point M de façon que

$$\frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{AMP}} < \omega.$$

En effet, construisons un triangle rectangle dont l'un des angles aigus soit égal à $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$, et soit δ le côté de l'angle droit de ce triangle qui est adjacent à l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$; nous pourrons déterminer le point M de façon que $\mathrm{MP} = \delta$ (35), et alors l'angle AMP, qui est l'angle de parallélisme correspondant à la distance δ, sera manifestement plus grand que $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$. C. Q. F. D.

Ainsi le quadrilatère OMPF a pour limite ODEB, et l'on peut dire, dans un certain sens, que l'aire illimitée AOFG est équivalente à ODEB.

Vu et approuvé :

Paris, le 13 septembre 1892.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 13 septembre 1892.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

Vu et approuvé :
Paris, le 13 septembre 1892.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 13 septembre 1892.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

18938 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

3 2044 079 966 651